

La Función de producción COBB – DOUGLAS The role of production COBB - DOUGLAS

Bruno E. Vargas Biesuz

**Instituto de Investigación de Ciencias Económicas y
Financieras, Universidad La Salle. La Paz - Bolivia
bvargasb@ulasalle.edu.bo**

Resumen

El presente trabajo, explica el origen y algunas características importantes de una de las funciones de producción de mayor aplicación en la economía y la ingeniería industrial, la función “Cobb – Douglas”. Por otra parte, para una mejor apreciación de la teoría explicada, se ha escrito en un lenguaje de programación especializado, el programa informático que permite visualizar en un gráfico la función de producción tratada.

Palabras Clave: Empresa, factores productivos, grafico tridimensional, producción, producto marginal, rendimientos crecientes de escala.

Abstract

This paper explains the origin and some important aspects of one of the most important mathematic relation applied in economics and industrial engineering, Cobb- Douglas production function. Furthermore, to appreciate in the better way the explained theory, it was writhen the informatics program to show the graphic of the production function .

Keywords Enterprise, productive inputs, three – dimensional graphic, production, marginal product, scale increasing outputs.

INTRODUCCION

El tema central de la ciencia económica es la producción de bienes y servicios. La actividad de producción se efectúa a través de unidades productivas llamadas empresas. Debido al desarrollo tecnológico y al standard de vida alcanzado por la sociedad moderna, existen millones de productos y consiguientemente millones de empresas. Cada producto demandado y consumido en la sociedad ha sido elaborado o producido combinando distintas cantidades de factores de

producción. Por ejemplo, para producir cierta cantidad de trigo, la empresa agrícola deberá utilizar distintas cantidades de factores productivos como: trabajo humano medido en horas laborales, bienes de capital como equipos o maquinaria, parcelas de tierra, recursos naturales y, por supuesto cierto nivel de conocimientos tecnológicos.

La teoría económica de la producción, se ocupa precisamente de este tema particular y su objetivo es brindar al empresario o directivo, información necesaria para que la empresa organice de manera eficiente su proceso de producción, utilizando eficientemente esos factores productivos, limitados y costosos y así maximizar las ganancias o beneficios de los propietarios.

Objetivos El objetivo general del presente artículo es difundir lo más claramente posible la teoría económica relacionada a una función de producción particular. Los objetivos específicos son:

- * Conocer las características fundamentales de la función de producción Cobb – Douglas.
- * Desarrollar el programa informático en un lenguaje de programación adecuado, para visualizar gráficamente la forma de la funciones de producción estudiada.
- * Graficar la función de producción Cobb – Douglas.

Contenido

Las Funciones de Producción Una función de producción muestra las distintas cantidades de producto que se puede obtener combinando distintas cantidades de factores productivos y dado cierto nivel de conocimientos o tecnología.

Esto se puede expresar en términos de funciones matemáticas de la siguiente forma:

$$Q = f (T, L, Rn, K)$$

Donde **Q** es la cantidad de producto obtenido, **T** representa el factor tierra, **L** el factor trabajo, **Rn** los recursos naturales, **K** los bienes de capital (maquinara, equipo, infraestructura productiva, herramientas, etc). Para simplificar esta expresión multidimensional, frecuentemente se la reduce a una función tridimensional como por ejemplo:

$$Q = f (L, K)$$

Esta relación indica que la cantidad de producción (**Q**), depende ahora, solamente de la combinación de distintas cantidades de trabajo (**L**) y capital (**K**). Los otros factores, en este caso, recursos naturales y tierra se los considera invariables o constantes. De esto, entenderá el lector que cada producto que se oferta en los mercados tiene una función de producción.

Las funciones de producción pueden ser expresadas en forma de tablas. Estas registran o muestran precisamente las cantidades de producción obtenida con las distintas cantidades de factores productivos usados. A partir de la información recolectada en las tablas y con métodos econométricos, se pueden obtener las ecuaciones correspondientes y a partir de estas, elaborar los gráficos que muestran la forma que tienen las funciones de producción.

La Función de Producción COBB – DOUGLAS. Una función de producción particularmente especial y muy útil en los análisis micro y macroeconómicos, es la función de producción Cobb – Douglas. Para conocer el origen de esta famosa función de producción, nos referiremos a lo explicado por Gregory Mankiw [1]. Este autor pregunta: ¿qué función de producción concreta describe la manera en que las economías reales transforman el capital y el trabajo en producción? Señala luego que la respuesta a esta pregunta fue fruto de la colaboración histórica de un senador estadounidense y un matemático. Sigue explicando que, Paul Douglas fue senador de estados Unidos por Illinois desde 1949 hasta 1966. En 1927, sin embargo, cuando aún era profesor de economía, observó un hecho sorprendente: la distribución de la renta nacional entre el capital y el trabajo se había mantenido más o menos constante durante un largo período. En otras palabras, a medida que la economía se había vuelto más próspera con el paso del tiempo, la renta de los trabajadores (o sus ingresos) y la renta de los propietarios del capital (o sus utilidades), había crecido casi exactamente a la misma tasa. Esta observación llevó a Douglas a preguntarse bajo qué condiciones las participaciones de los factores se mantenían constantes.

Sigue explicando el citado autor que, Douglas preguntó a Charles Cobb, matemático, si existía una función de producción que produjera participaciones constantes de los factores si éstos siempre ganaban su producto marginal. La función de producción necesitaría tener la propiedad de que:

$$\text{Renta del capital} = PMgK * K = \alpha * Y,$$

y,

$$\text{Renta del trabajo} = PMgL * L = (1 - \alpha) * Y,$$

donde α es una constante comprendida entre cero y uno que mide la participación del capital en la renta. Es decir, α determina la proporción de la renta (o ingresos) que obtiene el factor capital y la que obtiene el trabajo. Cobb demostró que la función que tenía esta propiedad era:

$$Y = f(K, L) = A K^\alpha L^{(1-\alpha)}$$

donde A es un parámetro mayor que cero que mide la productividad de la tecnología existente. Esta función llegó a conocerse con el nombre de **“función de producción Cobb – Douglas”**.

Propiedades fundamentales de la Función de Producción COBB – DOUGLAS.

Una de las propiedades más notables de la función de producción que nos ocupa, es la llamada de los “rendimientos constantes de escala”. Estos se dan cuando un incremento porcentual similar en los factores productivos, determina un aumento porcentual de la misma magnitud en el producto obtenido. Por ejemplo, tomando el caso de nuestra función de producción, si aumentamos el factor tierra (L), en un dos por ciento y el factor capital (K), también en un dos por ciento, se espera que el incremento en la cantidad producida sea del dos por ciento.

La demostración de esta propiedad es como sigue:

$$\text{Sea } Q = f(K, L) \qquad f(K, L) = A K^\alpha L^{(1-\alpha)}$$

Multiplicando la función por un factor constante i.e. “g”, se tiene:

$$F(gK, gL) = A (gK)^\alpha (gL)^{(1-\alpha)} = A g^\alpha K^\alpha g^{(1-\alpha)} L^{(1-\alpha)}$$

a continuación se realizan operaciones matemáticas básicas:

$$f(gK, gL) = A g^\alpha g^{(1-\alpha)} K^\alpha L^{(1-\alpha)} = A g^\alpha g^{1-\alpha} K^\alpha L^{(1-\alpha)}$$

$$f(gK, gL) = A g K^\alpha L^{(1-\alpha)} \qquad \text{pero: } g A K^\alpha L^{(1-\alpha)} = g f(K, L)$$

$$\text{por tanto: } f(gK, gL) = g f(K, L) = g Q$$

Se observa que el producto Q, aumenta en la misma proporción que el incremento “g”, es decir existen rendimientos constantes de escala.

Esta propiedad se puede observar más objetivamente a partir de una función de producción Cobb – Douglas, expresada en forma tabular, en la que los factores productivos son Tierra (T) y Trabajo (L):

LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN COBB – DOUGLAS

T	6	346	490	600	692	775	846
I	5	316	448	548	632	705	775
E	4	282	400	490	564	632	692
R	3	245	346	423	490	548	600
R	2	200	282	346	400	448	490
A	1	141	200	245	282	316	346
0							
		1	2	3	4	5	6
		T	R	A	B	A	J
							O

Tabla 1. Función de producción en forma tabular

Fuente: Samuelson P.A. & Nordhaus W.D. (1992). Economía. Madrid. Mc. Graw Hill. Pg. 131

Asumamos que se están utilizando dos unidades de factor Tierra y, dos unidades de factor trabajo. Se observa que la producción obtenida con esta cantidad de factores es 282 unidades de producto (Q). Ahora increméntense ambos factores hasta tres unidades, es decir un incremento del 50 %. La cantidad total producida es de 423 unidades y el incremento obtenido en la producción, con respecto al anterior nivel, es también del 50 %.

Antes de proseguir, cabe aclarar que la información contenida en la tabla puede ser resultado de una investigación en el campo agrícola. Una vez obtenida la información numérica de campo, se la regresiona con métodos econométricos y se obtiene la expresión matemática correspondiente o ecuación; en este caso es de la forma:

$$Q=100 \sqrt{(2*T*L)} \quad (1)$$

alternativamente:

$$Q=100*2^{(0,5)*T^{(0,5)*L^{(0,5)}}$$

que es precisamente una función Cobb – Douglas. Para verificar los datos de la tabla, reemplace en la fórmula, por ejemplo el factor tierra (T) con el valor 4 y, el factor trabajo (L) con el valor 5, el resultado Q será 632.

Otra de las propiedades fundamentales de esta función de producción, tiene que ver con la “Productividad Marginal” de los factores. Se entiende por productividad marginal de un factor, a la variación en la cantidad producida (Q), debido al incremento unitario de uno de los factores productivos, manteniendo los otros constantes.

Analicemos el caso de la productividad marginal del factor trabajo (L).

Sea la función de producción, de la forma:

$$Q = f(T, L) = f(T, L) = A T^\alpha L^{(1-\alpha)}$$

El producto marginal del factor productivo tierra (PMgT), se obtiene derivando parcialmente la función original con respecto al factor T, como sigue:

$$PMgT = \frac{\partial Q}{\partial T} = A T^\alpha (1-\alpha) L^{(1-\alpha)-1} = (1-\alpha) A T^{\alpha-1} L^{1-\alpha}$$

Análogamente, la productividad marginal del factor trabajo (PMgL) es:

$$PMgL = \frac{\partial Q}{\partial L} = A \alpha T^\alpha L^{(1-\alpha)-1} = \alpha A T^\alpha L^{(1-\alpha)-1}$$

Nuevamente, veamos los resultados de estas expresiones, de una forma más objetiva, a partir de la información de la tabla 01.

Si la cantidad utilizada del factor tierra es cuatro (4) y la cantidad de factor trabajo es dos (2), la cantidad de producto (Q) obtenido es de 400 unidades. Ahora mantengamos constante el factor tierra en el nivel de cuatro e incrementemos en una unidad el factor trabajo, es decir aumentemos L hasta tres (3). La cantidad de producción es ahora de 490 unidades. La productividad marginal del factor trabajo es de 90 unidades, la diferencia entre 490 y 400.

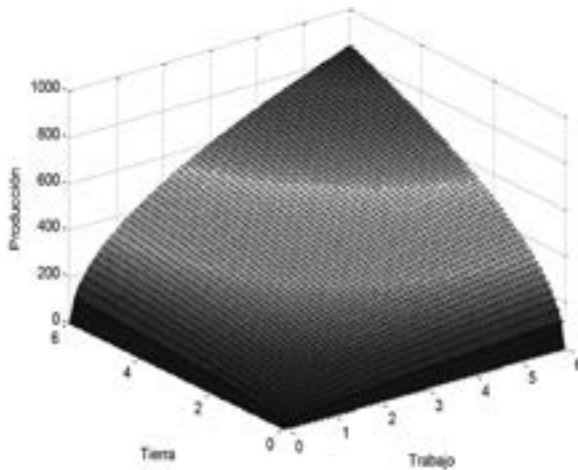
EL GRÁFICO DE LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN COBB – DOUGLAS

A continuación se observa cómo es el gráfico de la función de producción Cobb – Douglas, obtenida de la información de la Tabla 1:

$$Q=100 \sqrt{(2*T*L)}$$

LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN COBB – DOUGLAS

Ya que se tienen dos variables independientes (Ti y L), y una variable dependiente (Q), el gráfico es tridimensional.



El anterior gráfico ha sido obtenido elaborando el programa que sigue, en el lenguaje de programación del software MATLAB.

```
>> % PROGRAMA EN MATLAB%
>>% GRAFICO 3D FUNCION DE PRODUCCION COBB -
DOUGLAS%
>> clc
>> l=0:0.1:6;
>> a=0:0.1:6;
>> [L,A]=meshgrid(l,a)
>> Q=100.*sqrt(2.*L.*A);
>> surf(L,A,Q)
>> view(0,90)
>> xlabel('Trabajo');ylabel('Tierra');zlabel('Producción')
```

Conclusiones y Recomendaciones

Se espera haber contribuido a un mejor entendimiento de la economía de la producción a partir del desarrollo teórico expuesto. Asimismo, que el lector pueda no solo estudiar la teoría con ecuaciones y tablas, elementos que definen las funciones de producción, sino también pueda visualizar gráficamente las figuras

que les corresponden. Finalmente, el programa informático elaborado puede ser utilizado por los estudiosos del tema, para visualizar otras ecuaciones o funciones de producción. Para esto solo bastará modificar algunos elementos de los comandos del programa.

Referencias

Mankiw G. (2006). Macroeconomía. Barcelona. Antoni Bosch Editor.

Samuelson P.A. & Nordhaus W.D. (1992). Economía. Madrid. Mc. Graw Hill.

Gilat A. (2006). MATLAB Una introducción con ejemplos prácticos. España. Editorial Reverté.

Recibido: 17/04/2014

Aceptado: 14/07/2014