

DINÁMICA DE OPINIÓN EN REDES SOCIALES MULTICAPA OPINION DYNAMICS IN MULTILAYER SOCIAL NETWORKS

JOSÉ MARÍA LINO-BLACUTT^{1,a†} & GONZALO MARCELO RAMÍREZ-ÁVILA^{2,3,4,b‡}

¹ Carrera de Física, Universidad Mayor de San Andrés. Campus Universitario, c. 27 s/n Cota-Cota, Casilla 8635. La Paz-Bolivia.

² Instituto de Investigaciones Físicas, Universidad Mayor de San Andrés. Campus Universitario, c. 27 s/n Cota-Cota, Casilla 8635. La Paz-Bolivia.

³ Planetario Max Schreier, Universidad Mayor de San Andrés, c. Federico Zuazo 1976. La Paz-Bolivia.

⁴ Namur Institute for Complex Systems (naXys), Université de Namur, Rue de Bruxelles 61, B-5000 Namur, Belgium.

(Recibido 8 de julio de 2024; aceptado 27 de noviembre de 2024)

<https://doi.org/10.53287/ppvg6552fb99p>

RESUMEN

Se exploró la dinámica de opinión en redes multicapa mediante un modelo de evolución discreta. Mediante las distintas combinaciones de tres topologías de red (aleatoria, mundo pequeño y libre de escala), se estudiaron tres casos donde dos de ellos presentan características similares a sistemas sociales reales; en tanto que el otro es una situación idealizada. Se observó distintos comportamientos en la evolución del estado de opinión promedio $\langle S \rangle$ hasta alcanzar su estabilización en la red, notándose que esta estabilización ocurre en la mayoría de los casos para tiempos mayores a 100 pasos. Mediante la desviación estándar para cada configuración, se evidenció el alcance o no del consenso, destacando que algunas configuraciones requieren más de 600 pasos en llegar a dicha situación. Finalmente, se analizó el impacto de individuos intransigentes, mostrando que la presencia de al menos uno de estos individuos en cada una de las capas, genera mayor dispersión de las opiniones en la red.

Palabras clave: Sistemas sociales – Sistemas complejos – Redes en transiciones de fase – Dinámica no lineal – Teoría de grafos.

ABSTRACT

The opinion dynamics in multilayer networks were explored using a discrete evolution model. Three different network topologies (random, small-world, and scale-free) were combined to study three scenarios: two approximating real social systems and the other representing an idealized case. Various behaviors were observed in the evolution of the mean opinion state $\langle S \rangle$ until it stabilized in the network. It was observed that stabilization occurred in most cases after more than 100 steps. Through the standard deviation for each configuration, the achievement of consensus was evidenced and it was found that some configurations require more than 600 steps to reach this state. Finally, the impact of intransigent individuals was analyzed, showing that the presence of at least one such individual in each layer results in a greater dispersion of opinions in the network.

Subject headings: Social systems — Complex systems — Networks in phase transitions — Nonlinear dynamics — Graph theory.

1. INTRODUCCIÓN

Existe una rama interdisciplinaria que está alcanzando extrema importancia en las últimas décadas gracias al avance tecnológico y a la aplicación de conceptos de la física estadística. Esta rama es conocida como *sociofísica* la cual es la combinación de los conocimientos adquiridos en física y sociología. Mediante la sociofísica podemos entender y modelar fenómenos

sociales complejos como ser la propagación de rumores, la difusión de información, la toma de decisiones o la dinámica de opinión (Schweitzer 2018) constituyéndose este último aspecto en el tema central de nuestra investigación. Para poder modelar estos fenómenos sociales, los físicos contribuyen con métodos basados en redes complejas que permiten capturar la interacción de un grupo social como un sistema complejo. Los agentes están representados por nodos y sus interacciones por enlaces. A veces la complejidad de estas interacciones sociales es tan grande que es difícil modelar la red subyacente en una única capa de conexiones; es decir, en una sola red monoca-

^a<https://orcid.org/0009-0007-8856-9056>

^b<https://orcid.org/0000-0003-4522-9012>

[†]jlinob@fcpn.edu.bo

[‡]mravila@fiumsa.edu.bo

pa. Aquí es donde entra en escena el concepto de redes multicapa (Domenico 2022). Las redes multicapa presentan nodos y enlaces organizados en múltiples capas, donde cada capa está representada por un tipo diferente de enlace, un contexto social diferente, una red social diferente, etc. El interés en el estudio de las redes multicapa surge debido a que el análisis conjunto de múltiples capas puede proporcionar un conocimiento que no está presente en cada capa, cuando estas se consideran independientes entre sí. En sociofísica, las redes multicapa son de gran utilidad debido a su capacidad para modelar de manera más realista la diversidad y la dinámica de las interacciones sociales, lo que puede mejorar significativamente nuestra comprensión de un sistema social (Hu et al. 2017).

En sistemas sociales, al igual que en sistemas físicos, existen los cambios cualitativos del sistema que pueden asociarse a transiciones de fase; es decir, cambios abruptos o no lineales de un estado desordenado a otro ordenado. Por ejemplo, podemos llegar a un consenso de opinión generalizado sobre un tema específico. Es decir, es posible llegar a una situación de orden a partir de un estado inicial desordenado (opiniones diversas) gracias a las interacciones entre los constituyentes del sistema, lo que implica que exista una dinámica de opinión (Subieta-Frías & Ramírez-Ávila 2017).

El tipo de transiciones mencionado anteriormente fue investigado por Zanette 2009 donde la interacción ocurre en grupos de tres individuos en lugar de pares, demostrando que esta estructura favorece una convergencia más rápida hacia el consenso. Por otro lado, Balenzuela et al. 2015 analizaron cómo la presencia de agentes indecisos puede influir en la estabilidad de los estados de opinión, encontrando que estos individuos pueden actuar como mediadores que facilitan el consenso o, en ciertos casos, mantener la polarización dentro del sistema. Además, Krause & Bornholdt 2012 estudiaron el impacto de la incertidumbre y el temor en la toma de decisiones colectivas, mostrando que una mayor incertidumbre puede generar fluctuaciones en la dinámica de opinión, evitando que el sistema alcance un estado de orden estable.

Estos fenómenos han sido ampliamente estudiados utilizando modelos inspirados en física estadística y en teoría de juegos, como el modelo de votantes (Holley & Liggett 1975), el modelo de Ising (Ising 1925) y los “naming games” o juegos de negociación (Granovetter 1973), los cuales permiten analizar la formación de opiniones colectivas y el proceso de consenso en grupos sociales (Degroot 1974; Kuperman & Zanette 2002; Maity et al. 2012). Dichos modelos han demostrado ser herramientas efectivas para describir la evolución de la opinión en distintos contextos sociales, desde comunidades cerradas hasta redes interconectadas a gran escala. No obstante, aunque la mayoría de estos estudios han sido desarrollados desde un enfoque teórico, investigaciones empíricas recientes han permitido validar sus predicciones en

redes sociales reales. Por ejemplo, se ha encontrado que los patrones de evolución de opinión en plataformas digitales y comunidades en línea pueden ser explicados mediante modelos basados en interacciones locales, reflejando cómo las dinámicas sociales emergen a partir de la estructura y las reglas de interacción de los individuos (Xiong & Liu 2014).

Por lo tanto, podemos notar que el estudio de la dinámica de opinión en sistemas sociales es importante porque permite analizar los factores que la controlan o influyen como ser la topología de red o la presencia de nodos intransigentes (Galam 2013). Los nodos intransigentes son aquellos agentes presentes en una red social cuya opinión es invariante en el tiempo y por lo tanto la opinión de este tipo de nodos no puede ser influenciada por los demás agentes presentes en la red; sin embargo, la opinión de un nodo intransigente sí puede influir en la opinión de los demás (Galam & Jacobs 2007). El otro factor mencionado es la topología de red, la cual indica cómo está estructurada la red y qué patrones siguen los enlaces que permiten la conexión de los nodos.

Existen diferentes tipos de topología de red como ser:

Red aleatoria (Erdős & Rényi 1960): Red que consta de N nodos donde cada par de nodos tiene una probabilidad de conexión p .

Red mundo pequeño (Watts & Strogatz 1998): Red en la cual la mayoría de los nodos están conectados a otros nodos a corta distancia, de manera que la distancia promedio entre cualquier par de nodos en la red es relativamente pequeña.

Red libre de escala (Barabási & Albert 1999): Es una red cuya distribución de grados (el grado de un nodo en una red es el número de conexiones que tiene con otros nodos y la distribución de grados es la distribución de probabilidad de estos grados en toda la red) sigue una ley de potencia, al menos asintóticamente.

Mediante estas topologías, es posible modelar diferentes redes sociales reales dependiendo de las características de los grupos. Por ejemplo, las comunidades vecinales o grupos de amigos, a menudo exhiben una topología de red de mundo pequeño y las redes sociales en línea, como Facebook, Twitter muestran en general una topología de red libre de escala debido a que algunas personas son más influyentes o populares que otras (Noble et al. 2004).

Una descripción detallada de las redes recientemente mencionadas puede encontrarse en (Barabási 2003).

La forma en que está organizada una red no solo define su estructura, sino que también influye en cómo se propagan las opiniones dentro de ella. Por ejemplo, Kuperman & Zanette 2002 estudiaron cómo, en redes de mundo pequeño, las modas y tendencias pueden extenderse más rápido gracias a la resonancia estocástica. Además, en redes donde las conexiones entre personas pueden cambiar con el tiempo, la evolución de la opinión se ve afectada por esta adaptación de los vínculos (Nardini et al. 2008). Por otro lado, en redes sociales digitales, donde las

conexiones cambian constantemente y en tiempos cortos; es así que Maity et al. 2012 encontraron que la topología de red puede hacer que ciertos grupos mantengan opiniones diferentes durante largos periodos sin llegar a un consenso global.

Mediante este trabajo se pretende estudiar la dinámica de opinión mediante redes multicapa asociando distintas topologías de red a cada una de ellas y determinar las posibles correlaciones entre las capas y sus efectos. Posteriormente se pretende introducir individuos intransigentes en la red multicapa y examinar cómo su presencia altera la evolución del estado de opinión y la estabilidad de la red.

El presente documento está estructurado de la siguiente manera: En §2 se describe el modelo de evolución discreta el cual captura la interacción general entre los individuos (intra e intercapa). En §3 se describe la metodología que da cuenta de la representación del sistema en términos de multicapas; posteriormente, se dan casos de redes y finalmente, se introducen los individuos intransigentes al sistema. En §4 se presentan simultáneamente los resultados obtenidos acompañados de la discusión de estos. Finalmente, en §5 se exponen las conclusiones y perspectivas de esta investigación.

2. EL MODELO

Para este trabajo se considera un modelo de tiempo discreto el cual ya fue utilizado en otros trabajos como ser en (Subieta-Frías & Ramírez-Ávila 2017, 2023). El modelo describe la dinámica de opinión de un grupo social compuesto por N individuos y está representado mediante la siguiente ecuación:

$$S_j(t+1) = \frac{S_j(t) + \sum_{i=1}^N a_{ij} \cdot S_i(t)}{1 + \sum_{i=1}^N a_{ij}}, \quad (1)$$

con $j = 1, 2, 3, \dots, N$; donde $S_j(t+1)$ es el estado de opinión del individuo j en un tiempo $t+1$; este valor está determinado por el estado de opinión precedente del mismo individuo j y de los individuos i con los cuales interactúa. El grupo social está representado por una matriz de adyacencia simétrica donde los elementos de la matriz a_{ij} toman los valores 1 ó 0 dependiendo si existe o no un vínculo entre el individuo i con el individuo j . Este modelo sigue la estructura planteada por Degroot 1974, en la que las opiniones se actualizan de acuerdo con un promedio ponderado de los vecinos conectados en la red.

En este trabajo, la matriz con la que se describe al sistema es en realidad una matriz de supra-adyacencia. Esta matriz nos permite representar los vínculos que existen entre los individuos tanto dentro de las capas como entre las capas en una red multicapa. La matriz de supra-adyacencia está compuesta por matrices de adyacencia menores, a las cuales podemos interpretar como bloques. Los bloques diagonales codifican las matrices de adyacencia correspondientes a cada capa por separado. En otras palabras, los bloques diagonales capturan los vínculos que existen entre los individuos que están presentes

dentro de una capa en específico. Los bloques fuera de la diagonal codifican conexiones entre capas; es decir, los vínculos que existen entre los individuos que están presentes en diferentes capas están representados en los bloques no diagonales de una matriz de supra-adyacencia.

3. METODOLOGÍA

Primeramente, se consideraron los tres tipos de topologías que luego son utilizados mediante diferentes combinaciones para así crear diferentes configuraciones de redes multicapa. Posteriormente, para cada topología de red se obtuvo su respectiva matriz de adyacencia. Estas matrices tienen la característica de ser no pesadas y no direccionadas lo que implica que la interacción entre el individuo i y j es bidireccional y de la misma magnitud por lo que la matriz es simétrica. Entonces, cada topología de red representa una capa dentro de la red multicapa, y por ende, cada capa está descrita por su respectiva matriz de adyacencia; en tanto que, la red multicapa estará descrita por la matriz de supra-adyacencia de dimensión $N \times N$, donde:

$$N = n' \cdot L, \quad (2)$$

siendo n' el número total de individuos presentes en toda la red multicapa y L es el número de capas.

Los vínculos que posibilitan la interacción entre capas son debidos a individuos que están presentes en cada una de las ellas; estos individuos son conocidos como nodos réplica (o nodos comunes) n_c . Otro tipo de vínculos que se da entre las capas es cuando individuos de una capa que representa un grupo social conocen a otras personas de otro grupo social; es decir, tienen un vínculo con otros individuos presentes en otras capas. El número de personas que se conocen entre las capas L_1 y L_2 está denotado por $n_{il(1 \leftrightarrow 2)}$; mientras que las personas que se conocen entre las capas L_1 y L_3 está representado por $n_{il(1 \leftrightarrow 3)}$ y de la misma forma $n_{il(2 \leftrightarrow 3)}$ representa el número de individuos que se conocen entre las capas L_2 y L_3 . Nótese que la notación $n_{il(q \leftrightarrow r)}$ hace referencia al número de individuos que tienen vínculos entre las capas L_q y L_r , donde el subíndice “il” indica “intercapas” por su denominación en inglés “interlayer”.

Todos estos vínculos creados gracias a los n_c nodos réplica y los vínculos creados por los n_{il} individuos que conocen a otras personas de las distintas capas son representados en las casillas correspondientes de los bloques no diagonales presentes en la matriz de supra-adyacencia.

En la Fig. 1 se ilustra un ejemplo de una red multicapa y su respectiva matriz de supra-adyacencia. En la parte izquierda de la Fig. 1 observamos que el nodo réplica que se encuentra en todas las capas es el individuo 2. También nótese que, las personas 1, 5 y 8 son aquellas que presentan un vínculo intercapa entre ellas. En la parte derecha de la Fig. 1 se muestra su respectiva matriz de supra-adyacencia. Los bloques diagonales capturan la interacción de los individuos al interior de las capas mientras que los

bloques alrededor de estos capturan la interacción de los individuos entre las capas. Las casillas rojas representan la presencia del nodo réplica en las tres capas; las casillas naranjas representan la conexión entre los individuos 1, 5 y 8.

3.1. Aplicación del modelo discreto a la red multicapa

Para aplicar el modelo discreto a la red multicapa fue necesario primeramente dotar de opiniones iniciales a todos los individuos presentes en la red. Por lo tanto, para un tiempo $t = 0$ se realizó un sorteo para asignar estas opiniones a los mismos con valores en el intervalo $[0, 1]$, siguiendo una distribución Gaussiana con una media y varianza iguales a 0.5.

Para aquellos nodos réplica que estuvieron presentes en las tres capas de la red, se hizo que el valor de su estado de opinión inicial fuera el mismo en todas las capas. Para entender este punto, tomemos el ejemplo en el que existe un único individuo, el cual está presente en todos los grupos; es decir, un nodo réplica. Cuando se debate un tema en particular, todas las personas tendrán una opinión inicial respecto al mismo y con un valor comprendido en el intervalo $[0, 1]$. El individuo presente en todos los grupos sociales debe tener la misma opinión inicial ya que de otra forma sería ilógico que el individuo compartiera una opinión inicial distinta del mismo tema en los diferentes grupos.

Una vez que todos los individuos de la red multicapa tienen un valor inicial para su estado de opinión; estos evolucionan considerando la Ec. (1). En cada paso de tiempo se obtuvieron los estados de opinión de todos los individuos y mediante estos se logró establecer el valor promedio del mismo ($\langle S \rangle$) de la red multicapa. Conjuntamente, para cada valor del estado de opinión promedio se obtuvo su respectiva desviación estándar.

En la Fig. 2, se presentan las distribuciones de opinión de los individuos en la red multicapa al inicio y al final de la simulación. La distribución inicial de opiniones sigue una distribución Gaussiana centrada en 0.5, lo que representa la diversidad de opiniones iniciales de los individuos presentes en la red multicapa (Fig. 2(a)). A medida que los individuos interactúan según el modelo de tiempo discreto presentado en la Ec. (1), las opiniones convergen hacia un mismo valor. Después de 600 pasos de tiempo, la distribución final adopta la forma de una delta de Dirac, lo que indica que se ha alcanzado un estado de consenso en la red (Fig. 2(b)).

3.2. Casos de estudio

Para cumplir el objetivo de estudiar la dinámica de opinión mediante redes multicapa; se analizó la evolución del estado de opinión promedio $\langle S \rangle$ mediante diferentes casos que presentan diferentes características de conectividad entre los individuos en cada capa.

Cada caso fue estudiado mediante 10 configuraciones de red multicapa las cuales están presentadas en

TABLA 1

Combinaciones de las topologías de red en una red multicapa compuesta por 3 capas.

	Capa L_1	Capa L_2	Capa L_3
1	Red aleatoria	Red aleatoria	Red aleatoria
2	Red aleatoria	Red aleatoria	Red mundo pequeño
3	Red aleatoria	Red aleatoria	Red libre de escala
4	Red mundo pequeño	Red mundo pequeño	Red mundo pequeño
5	Red mundo pequeño	Red mundo pequeño	Red aleatoria
6	Red mundo pequeño	Red mundo pequeño	Red libre de escala
7	Red libre de escala	Red libre de escala	Red libre de escala
8	Red libre de escala	Red libre de escala	Red aleatoria
9	Red libre de escala	Red libre de escala	Red mundo pequeño
10	Red aleatoria	Red mundo pequeño	Red libre de escala

la Tabla 1. Cada red multicapa presenta una combinación distinta de topologías en cada capa, siendo el número de individuos en cada capa:

$$n_{L_1} = n_{L_2} = n_{L_3} = 100,$$

donde n_{L_i} representa el número de individuos presentes en la capa L_i . Se elige que 5 sean los nodos comunes n_c y los que vinculan entre las distintas capas n_{il} :

$$n_c = 5,$$

$$n_{il(1 \leftrightarrow 2)} = n_{il(1 \leftrightarrow 3)} = n_{il(2 \leftrightarrow 3)} = 5$$

3.2.1. Casos analizados en ausencia de individuos intransigentes

A. Redes altamente conectadas — Consideramos que en cada capa, los individuos están altamente vinculados con los otros.

B. Redes con pocas conexiones — Los individuos en cada una de las capas no presentan una alta conectividad; es decir, que en general, las personas no tienen muchos conocidos dentro de cada capa.

C. Redes artificiales o idealizadas — Al igual que en los anteriores casos se tienen las tres topologías, con la particularidad que se tienen situaciones extremas en las correspondientes a mundo pequeño (red lineal con condiciones de borde periódicas) y libre de escala (red árbol), denominándose por este motivo como “artificiales”.

En la Fig. 3, se presentan las diferentes topologías de red utilizadas en los tres casos analizados. Los incisos (A1), (A2) y (A3) corresponden a una red aleatoria, una de mundo pequeño y una libre de escala, respectivamente, bajo el caso A, donde las redes están altamente conectadas. En estas representaciones, los individuos (puntos negros) mantienen una gran cantidad de conexiones entre sí (enlaces que los vinculan). Por otro lado, los incisos (B1), (B2) y (B3) muestran las mismas topologías de red, pero bajo el caso B, donde la conectividad entre los individuos es considerablemente menor. De manera similar, los incisos (C1), (C2) y (C3) presentan las mismas estructuras de red en el caso C (redes artificiales), siguiendo el mismo orden que en los casos anteriores. El inciso (D) ilustra un ejemplo de red multicapa con la

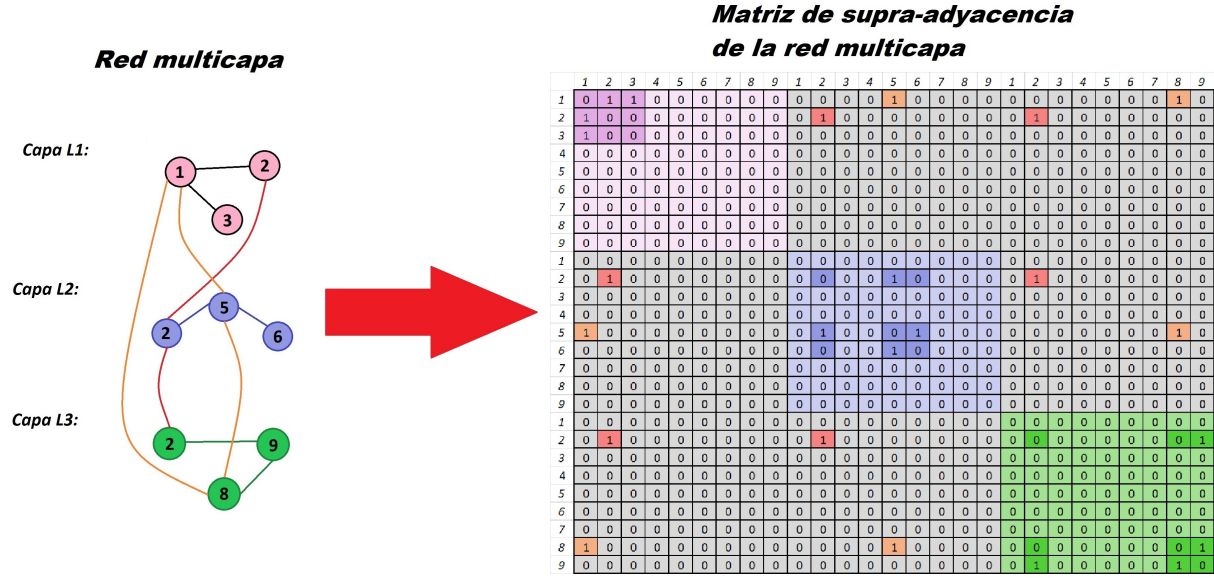


Fig. 1.— Ejemplo ilustrativo de una red multicapa y la representación de esta mediante su matriz de supra-adyacencia. En la parte izquierda se muestran los vínculos entre los individuos intra e intercapas. Se evidencia que el individuo 2 es el que está presente en todas las capas; esto se presenta mediante las líneas rojas que conectan este nodo réplica. Las líneas naranjas muestran los vínculos entre los individuos 1, 5 y 8 los cuales están presentes en diferentes capas. En la parte derecha se muestra la matriz de supra-adyacencia, mediante la cual, podemos representar todos los vínculos presentes entre los individuos tanto dentro de las capas como entre las capas.

configuración 10 descrita en la Tabla 1, donde L_1 , L_2 y L_3 corresponde a redes aleatoria, mundo pequeño y red libre de escala, respectivamente, bajo el caso B (baja conectividad dentro de cada capa). En este ejemplo, los vínculos entre los individuos de la capa L_1 que conocen a los de la capa L_2 están representados mediante enlaces rojos; los enlaces azules representan los vínculos entre individuos de la capa L_1 con la capa L_3 ; los enlaces verdes son los vínculos entre individuos de la capa L_2 con la capa L_3 . Finalmente, mediante los enlaces amarillos se representa el vínculo que tiene un individuo réplica consigo mismo en las otras capas.

3.2.2. Individuos intransigentes en la red multicapa

Como último objeto de estudio, se introdujo a la red multicapa individuos intransigentes. Para esta parte se trabajó únicamente con la configuración de red multicapa 10 presentada en la Tabla 1 (L_1 : Red aleatoria; L_2 : Red mundo pequeño; L_3 : Red libre de escala). En esta red multicapa se consideraron diferentes casos los cuales se diferencian unos de otros por el número de intransigentes y la distribución de estos en las distintas topologías de red. Estos casos son presentados como distribuciones en la Tabla 2. Todas las distribuciones fueron consideradas en cada uno de los casos mencionados en § 3.2.1.

Todo el trabajo fue elaborado mediante simulaciones con códigos propios en lenguaje Python.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. Redes multicapa sin intransigentes

Se presentan los resultados obtenidos para cada uno de los casos mencionados en § 3.2.1. Para cada situación se tienen 10 curvas las cuales representan las configuraciones de redes multicapa con las que

TABLA 2

Distribución de los individuos intransigentes entre las capa de la red multicapa.

	Capa L_1 : Red aleatoria	Capa L_2 : Red mundo pequeño	Capa L_3 : Red libre de escala
Distribución 0	0	0	0
Distribución 1	0	1	1
Distribución 2	1	0	1
Distribución 3	1	1	0
Distribución 4	1	1	1
Distribución 5	2	2	2

se trabajó (ver Tabla 1). Para cada configuración se realizaron 100 experimentos numéricos y gracias a estas se obtuvo la curva de la evolución del estado de opinión promedio $\langle S \rangle$ y su respectiva desviación estándar.

Mediante $\langle S \rangle$ se muestra la evolución de opinión del sistema. Inicialmente la opinión de un individuo puede ser diferente a la opinión de los demás, pero después de un transitorio, la opinión promedio se mantiene constante en el tiempo aunque las opiniones individuales puedan seguir variando. Es aquí donde el sistema alcanza la estabilización caracterizada por el valor de equilibrio que la opinión promedio alcanza, denotado como $\langle S \rangle_{eq}$.

En la Fig. 4, se muestra la evolución del grado promedio de la red multicapa obtenido a partir de 100 simulaciones numéricas para las configuraciones presentadas en la Tabla 1. La variación del grado promedio se estudió en función de la probabilidad de conexión, lo que permite evaluar cómo cambia la estructura de la red a medida que aumenta la densidad de enlaces. Se observa que, para valores de probabilidad cercanos a 1, la red se vuelve altamente conectada; en otras palabras, los individuos están altamente vinculados. Para valores cercanos a 0.2, la conectivi-

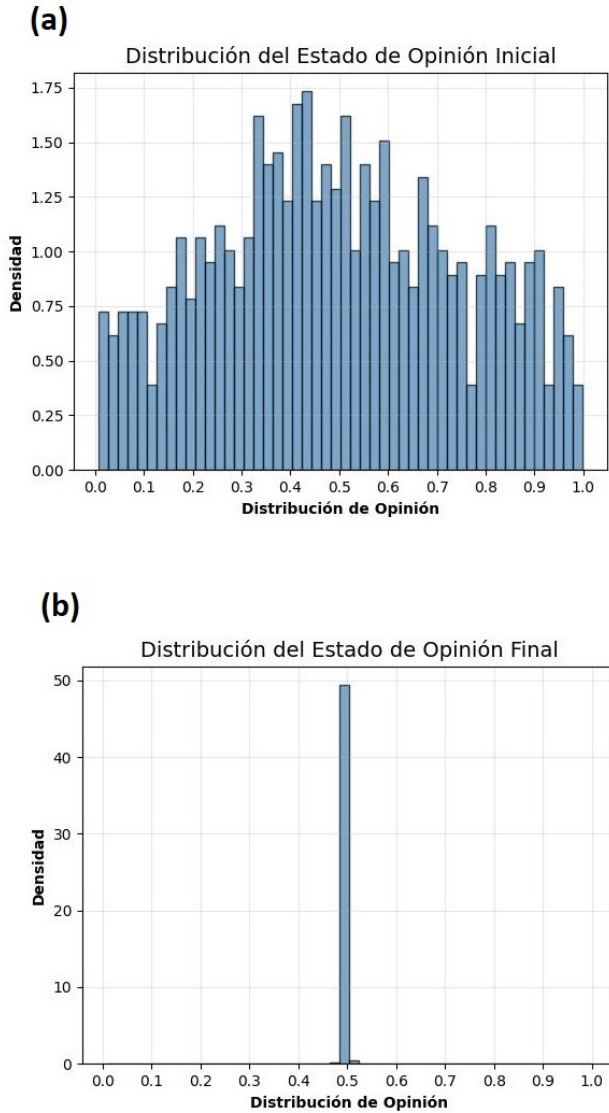


Fig. 2.— (a) Distribución inicial de opiniones en la red multicapa, siguiendo una distribución Gaussiana. (b) Distribución final de opiniones tras 600 pasos de tiempo, donde todas las opiniones llegaron a un mismo valor.

dad es significativamente menor lo cual nos indica que los individuos en una red multicapa no tienen muchos conocidos dentro de cada capa.

En la Fig. 5, se distinguen las curvas correspondientes a cada configuración de red multicapa en relación a cada uno de los casos mencionados en §3.2.1. Se puede observar que las curvas presentan evoluciones muy diversas del estado de opinión promedio. Algunas mostrando inicialmente la tendencia de una evolución a valores crecientes y otras a valores decrecientes de $\langle S \rangle$; esto se debe a la sensibilidad a las condiciones iniciales de las opiniones individuales (Subieta-Frías & Ramírez-Ávila 2017). Sin embargo, todas llegan a una situación de estabilización después de un transitorio. También se observa que algunas curvas no presentan evolución o simplemente la evolución de estas ocurre entre 1 a 3 pasos de tiempo como, por ejemplo, en la Fig. 5(a) las configu-

raciones 1 (azul), 4 (celeste) y 7 (negro). Esto puede deberse al hecho de que para el primer caso, las redes multicapa presentan una alta conectividad entre los individuos presentes, lo que provoca una rápida estabilización del estado de opinión promedio. Otro motivo por el cual pudiese existir esta rápida evolución a la estabilidad es por el hecho de que estas redes multicapa presentan la misma topología de red en sus capas: La configuración 1 presenta una topología de red aleatoria; la configuración 4 presentan una topología de red mundo pequeño; y en la configuración 7, todas las capas tienen una topología libre de escala.

Notemos también que las redes que tienen un mayor transitorio son las configuraciones 8 (naranja) y 9 (morado). El tiempo en el que ambas alcanzan su estabilización es cercano a los 300 pasos. Lo común a estas dos redes multicapa 8 y 9 es que ambas presentan una topología de red libre de escala en sus dos primeras capas, y la restante capa presenta una topología de red aleatoria, y mundo pequeño, respectivamente.

En la Fig. 5(b), se presentan las curvas obtenidas para el caso B. A diferencia de la Fig. 5(a), notamos que una mayor cantidad de configuraciones presentan un transitorio. La mitad de estas configuraciones que son la configuración 2 (verde), 3 (rojo), 6 (mostaza), 9 (morado) y 10 (marrón), llegan a su estabilización entre los 120 y 140 pasos de tiempo, mientras que las configuraciones 5 (fucsia) y 8 (naranja) la alcanzan entre los 170 y 190 pasos. En la Fig. 5(c) observamos las distintas curvas de las configuraciones de redes multicapa aplicadas al caso C. Las curvas que más destacan dentro de este caso son las configuraciones 2 (verde) y 5 (fucsia). El transitorio de la configuración 5 es apreciable y puede llegar a ser de alrededor de 240 pasos de tiempo; en tanto, para la configuración 2, el valor transitorio de $\langle S \rangle$ es menos pronunciado, aún cuando su estabilización puede tomar más de 300 pasos. En estas dos redes multicapa solo existe la presencia de dos topologías de red: aleatoria y mundo pequeño.

A partir de todas estas observaciones podemos resaltar el hecho de que en redes multicapa es posible llegar a la estabilización al igual que se logró en (Subieta-Frías & Ramírez-Ávila 2017) donde solo se trabajó con redes monocapa. La diferencia radica en los pasos de tiempo; en las redes monocapa estudiadas en (Subieta-Frías & Ramírez-Ávila 2017), la estabilización se alcanza entre los 5 y 10 pasos de tiempo; en cambio para las redes multicapa, alcanzar la estabilización toma un número de pasos de tiempo mayor a 100.

El valor del estado de opinión promedio inicial (el cual es aproximadamente 0.5) usado como referencia está representado mediante una línea gris segmentada (Fig. 5). Mediante este valor se determina en cuánto las curvas de los estados de opinión promedio $\langle S \rangle$ se alejan de la referencia. Las curvas de las configuraciones presentadas para el caso A (Fig. 5(a)) son las que más se alejan de la línea segmentada referencial (exceptuando algunas configuraciones como

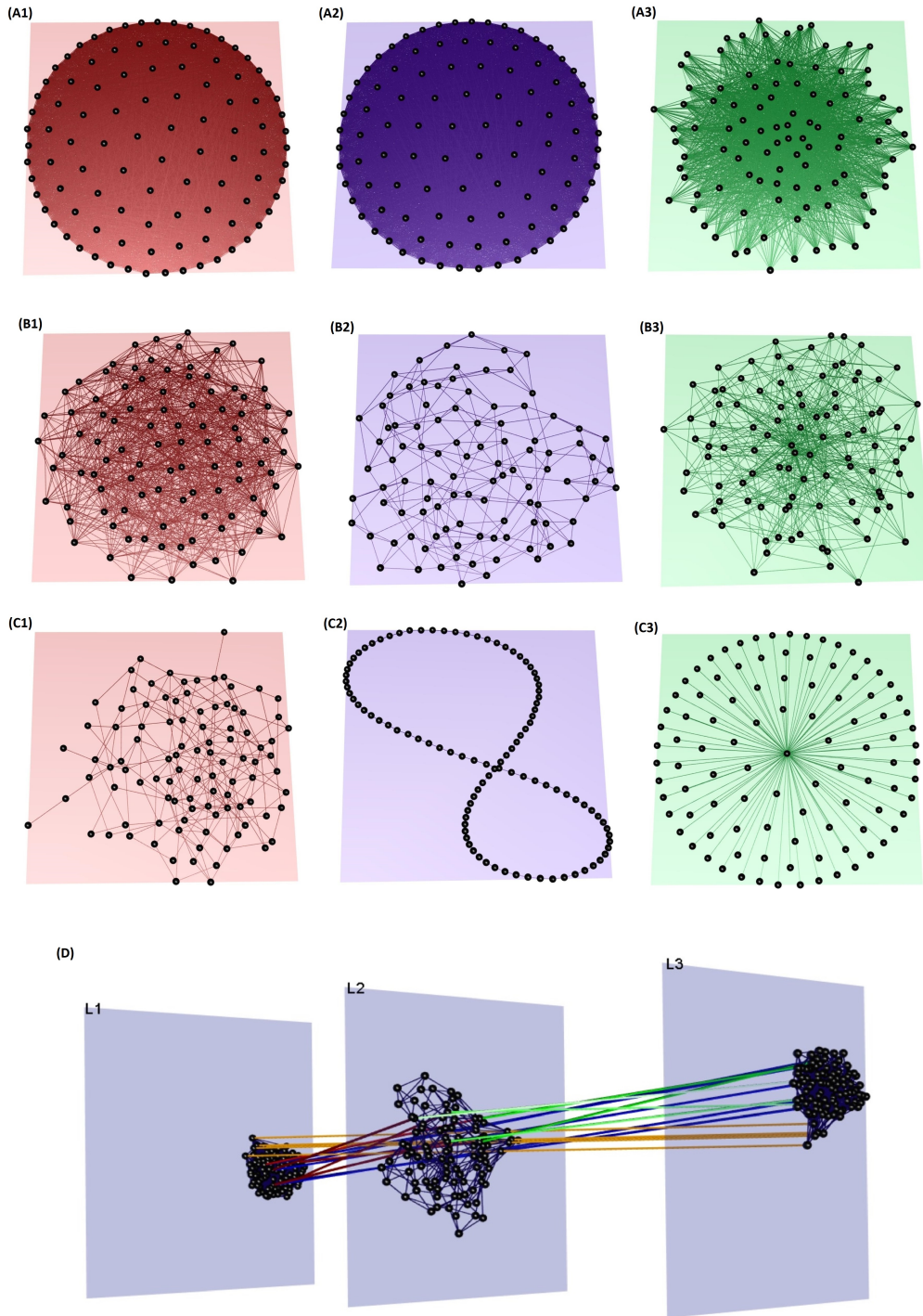


Fig. 3.— Representación de las distintas topologías de red en los tres casos analizados: (A1), (A2) y (A3) corresponden a una red aleatoria, una de mundo pequeño y una libre de escala, respectivamente, en el caso A (redes altamente conectadas). (B1), (B2) y (B3) muestran las mismas topologías bajo el caso B (redes con poca conectividad); en tanto que (C1), (C2) y (C3) presentan las mismas configuraciones en el caso C (redes artificiales). (D) Ejemplo de red multicapa con la configuración 10 de la Tabla 1, (L_1 : Red aleatoria; L_2 : Red mundo pequeño; L_3 : Red libre de escala), bajo el caso B. Los enlaces rojos representan los vínculos entre individuos de L_1 y L_2 ; los enlaces azules, las conexiones entre L_1 y L_3 ; los enlaces verdes, los vínculos entre L_2 y L_3 . Finalmente, los enlaces amarillos conectan a los individuos réplica entre las distintas capas. (Imágenes generadas en el software muxViz).

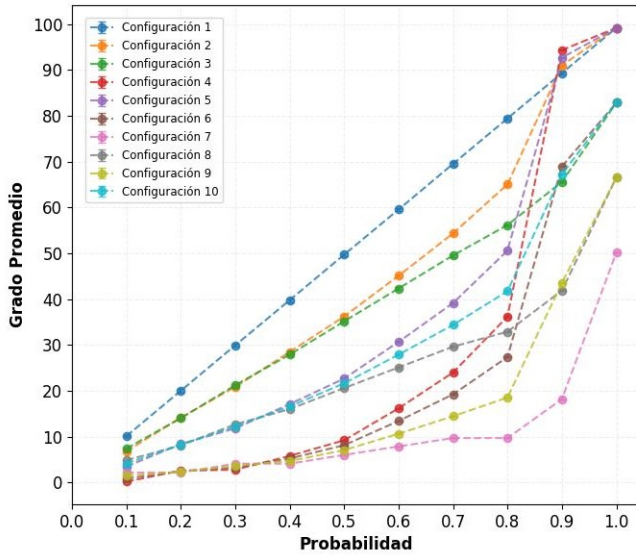


Fig. 4.— Grado promedio de la red multicapa en función de la probabilidad de conexión. Se realizaron 100 simulaciones por configuración y se observó que para valores de probabilidad cercanos a 1, la red es altamente conectada, mientras que para valores cercanos a 0.2, la conectividad es significativamente menor.

ser la 1 (azul) y la 2 (rojo)), lo opuesto a lo que ocurre para el caso C (Fig. 5(c)) donde las curvas presentan valores más próximos al valor de referencia. Esto corrobora los resultados presentados en (Subieta-Frías & Ramírez-Ávila 2017), lo que nos indica que la evolución del estado de opinión promedio se aleja más del valor de referencia cuando los individuos están altamente conectados; mientras que, cuando no existen muchos vínculos (bajo valor del grado de la red), la evolución se mantiene cercana al valor inicial.

Cuando se estudia este tipo de sistemas sociales y la evolución de opinión del grupo, se busca determinar si el sistema alcanza el consenso, el cual es un estado que indica el acuerdo de opinión de todos los individuos respecto a un determinado tema de discutido. Es por eso que para lograr este estado es necesario la interacción entre las personas que conforman el grupo social.

Un indicador estadístico que está ligado a este concepto y el cual nos ayuda a determinar el grado de consenso alcanzado es la desviación estándar; mediante la misma se puede observar la dispersión de los datos (en este caso, las opiniones de los individuos). Si el valor de la desviación estándar es alto, las opiniones individuales del grupo difieren unas de otras; caso contrario, el valor de la desviación estándar es nula o tiende a cero, mostrando así una tendencia al consenso.

En la Fig. 6, se presentan las desviaciones estándar de las configuraciones en cada caso. En la Fig. 6(a) se observa que todas las curvas de desviación estándar para el caso A tienden a disminuir y asintóticamente a cero; sin embargo, ninguna de ellas alcanza el valor cero a pesar que sus respectivas curvas de la evolución del estado de opinión promedio $\langle S \rangle$ llegaron a la estabilización. El caso A

es una buena situación para poder entender la diferencia entre estabilización y consenso. Se observa que en la Fig. 5(a), las curvas llegan a estabilizarse después de un determinado tiempo; pero no se observa una estabilización de sus respectivas desviaciones estándar. Lo anterior es un indicador de que no se llegó al consenso. Sin embargo, la tendencia seguida por las curvas de desviación estándar nos dan los elementos para prever un eventual alcance del consenso, aunque para lograr lo anterior, se requiere tiempos mayores a 600.

En la Fig. 6(b) se observa que todas las curvas de la desviación estándar tienden asintóticamente a cero, mostrando así que los grupos sociales de las 10 redes multicapa alcanzan el consenso cuando estas están débilmente vinculadas (valor pequeño del grado de la red).

La situación del caso C mostrada en la Fig. 6(c), las configuraciones 3 (rojo), 7 (negro) y 8 (naranja) tienden al consenso en pasos de tiempo cercanos a los 300. En cambio, las demás configuraciones aún no llegaron a un consenso, pero, al igual que en la Fig. 6(a), se puede prever una tendencia asintótica a cero.

En la Fig. 7, se presenta una comparación tanto de las evoluciones de los estados de opinión promedio $\langle S \rangle$ como de sus respectivas desviaciones estándar para la configuración 10 aplicada a los tres casos. Se escogió hacer la comparación de esta configuración debido a que es la única que presenta tres distintas topologías de red en cada una de las capas de la red multicapa; es decir, la capa L_1 tiene una topología de red aleatoria, L_2 es una red mundo pequeño y L_3 es una red libre de escala. En la Fig. 7(a) se muestra las evoluciones de los estados de opinión promedio notando que para el caso A (morado) la estabilización ocurre para un valor cercano a los 200 pasos; para el caso B (verde añil) a los 130 pasos; y finalmente para el caso C (rosa), observamos que la estabilización no llega hasta después de los 235 pasos de tiempo. En la Fig. 7(b) se presentan las respectivas curvas de la desviación estándar. Notamos que para los casos A (morado) y C (rosa) las curvas parecen tender asintóticamente a 0; en cambio, para el caso B (verde añil) vemos que se alcanzó el consenso para un valor cercano a los 420 pasos de tiempo.

4.2. Intransigentes en la red multicapa

A continuación se procede a analizar el efecto de la presencia de los individuos intransigentes en las redes multicapa (ver §3.2.2). Al igual que en la sección anterior, se obtuvieron las curvas que muestran la evolución del estado de opinión promedio $\langle S \rangle$ realizando 100 experimentos numéricos para cada distribución, lo que se presenta en la Tabla 2. La Fig. 8 resalta este hecho tomando como ejemplo ilustrativo la distribución 3 (cuando en la red multicapa existe la presencia de un individuo intransigente en las capas L_1 y L_2) dentro del contexto en el que los individuos presentes en las capas de la red multicapa están altamente vinculados unos con otros (caso A). En la Fig. 8 se observa la evolución del estado de opinión

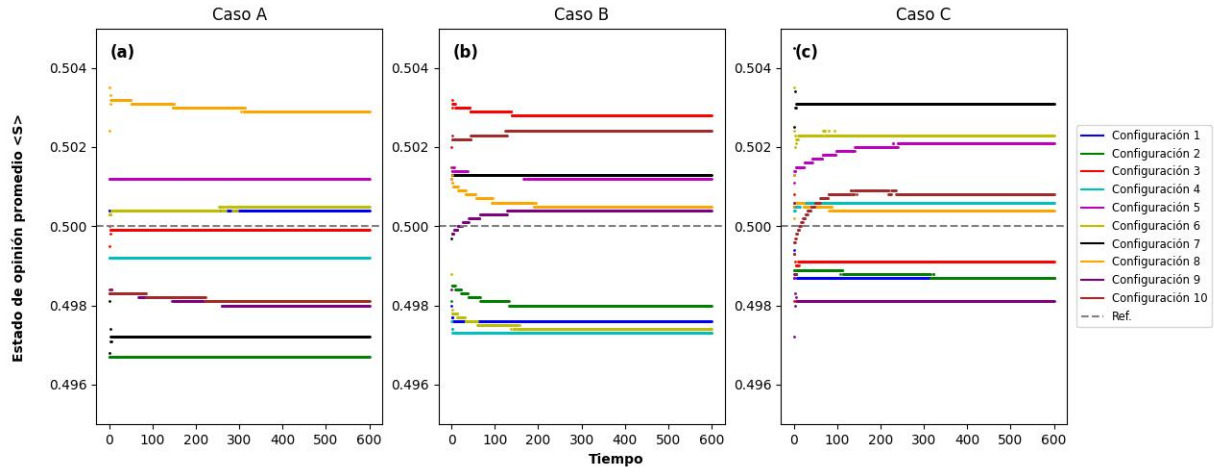


Fig. 5.— Evolución del estado de opinión promedio $\langle S \rangle$ de las distintas configuraciones de redes multicapa presentadas en la Tabla 1 aplicadas a cada caso.

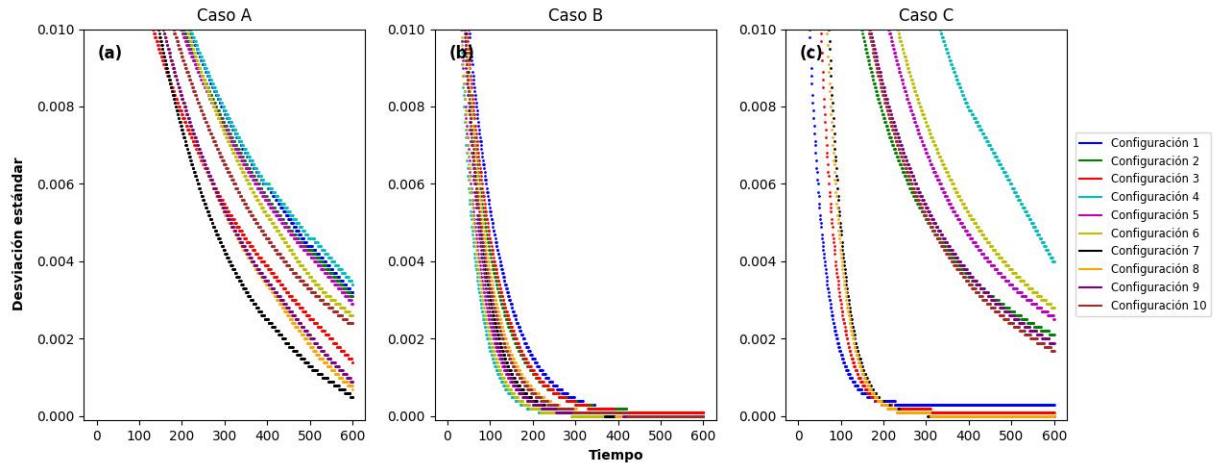


Fig. 6.— Evolución de la desviación estándar en relación a la Fig. 5.

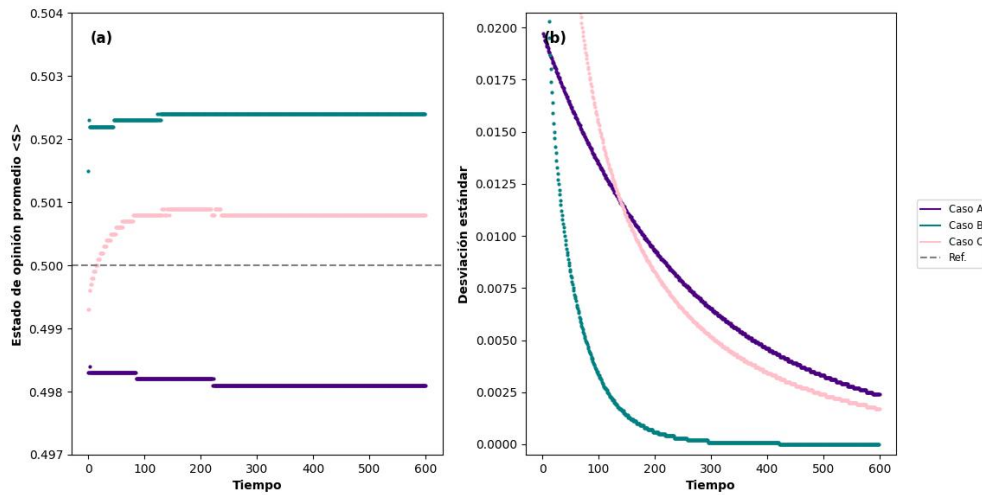


Fig. 7.— Comparación de las evoluciones del estado de opinión promedio $\langle S \rangle$ y de sus respectivas desviaciones estándar para la configuración 10 (L_1 : Red aleatoria, L_2 : Red mundo pequeño, L_3 : Red libre de escala) dentro del contexto de los tres casos.

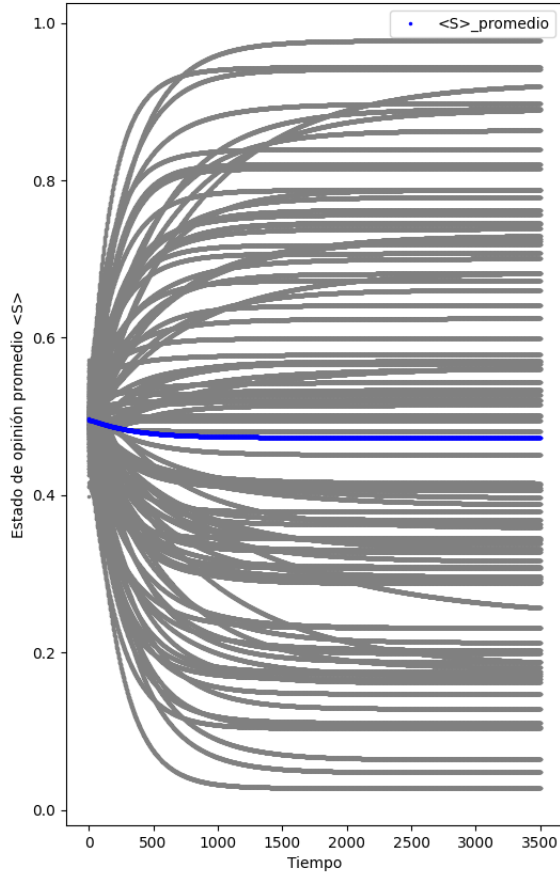


Fig. 8.— Evolución del estado de opinión promedio $\langle S \rangle$ de la red multicapa cuando en esta existe la presencia de un individuo intransigente en la capa L_1 : Red aleatoria y en la capa L_2 : Red mundo pequeño (distribución 3). Las curvas grises representan cada uno de los valores del estado de opinión de los 100 experimentos numéricos realizados para este caso; mientras que la curva azul representa el estado de opinión promedio de estos 100 experimentos numéricos.

promedio $\langle S \rangle$ que se obtuvo para cada uno de los 100 experimentos numéricos (curvas grises). Se nota que algunas curvas alcanzan su valor de equilibrio $\langle S \rangle_{eq}$ cercano a los valores extremos 0 y 1, mostrando así la alta influencia que puede llegar a tener la presencia de los intransigentes en la red multicapa (Hu et al. 2017). La curva azul representa la curva promedio correspondiente a los 100 experimentos numéricos.

En la Fig. 9 se muestran las respectivas curvas de las evoluciones del estado de opinión promedio $\langle S \rangle$ de cada caso presentado en la Tabla 2. La distribución 0 (azul) es aquella en la que no existe presencia de intransigentes en las capas de la red lo cual hace que su respectivo valor de $\langle S \rangle_{eq}$ sea el más cercano al valor de referencia 0.5, representado por la línea segmentada gris. Por otro lado, la introducción de intransigentes hace que los valores de $\langle S \rangle_{eq}$ sean considerablemente diferentes, llegando a ser en algunas situaciones mayores que 0.52 o menores que 0.48. También se observa que el valor de $\langle S \rangle_{eq}$ alcanzado difiere según las distribuciones analizadas; de la misma forma, los valores $\langle S \rangle_{eq}$ de las diferentes distribuciones analizadas, varían según el caso

dentro de la cual se esté aplicando (ver §3.2.1). En la Fig. 9(a), la cual representa la situación de redes multicapa altamente conectadas (caso A); los casos que más se alejan del valor de referencia corresponden a las distribuciones 4 (fucsia) y 5 (mostaza), alcanzando sus valores de equilibrio $\langle S \rangle_{eq}$ aproximadamente en 0.53 y 0.47, respectivamente. Para la situación donde las redes multicapa presentan pocas conexiones (caso B), en la Fig. 9(b), las distribuciones 1 (verde) y 4 (fucsia) son aquellas cuyos valores de $\langle S \rangle_{eq}$ están por encima y por debajo de 0.51 y 0.49, respectivamente. Finalmente, para la situación de redes artificiales (caso C), en la Fig. 9(c), los valores de $\langle S \rangle_{eq}$ alcanzados sobre están por debajo de 0.48 que se da para las distribuciones 3 (celeste) y 4 (fucsia). Nótese que para la distribución 4 (fucsia), correspondiente a la presencia de un individuo intransigente en cada una de las capas de la red, es aquella que presenta el mayor valor de $\langle S \rangle_{eq}$ dentro de los tres casos.

Analizando los transitorios más relevantes observamos que, para el caso A (redes altamente conectadas) (Fig. 9(a)), los transitorios de las distribuciones 1 (verde) y 2 (rojo) son más largos en comparación a las demás distribuciones dentro de esta situación. Para la distribución 1 (donde existe la presencia de un intransigente en las capas L_2 : Red mundo pequeño y L_3 : Red libre de escala) la evolución del estado de opinión promedio $\langle S \rangle$ alcanza el equilibrio después de de 2500 pasos de tiempo; en tanto que para la distribución 2 (donde existe la presencia de un intransigente en las capas L_1 : Red aleatoria y L_3 : Red libre de escala) la convergencia del estado de opinión promedio $\langle S \rangle$ ocurre después de los 2300 pasos.

Tanto para el caso B (redes con pocas conexiones) (Fig. 9(b)) como para el caso C (redes artificiales) (Fig. 9(c)), el transitorio mayor ocurre nuevamente para la distribución 1 (verde) donde la evolución llega a su valor de equilibrio $\langle S \rangle_{eq}$ para valores cercanos a 2400 y 2200 pasos de tiempo, respectivamente. De esta forma, se puede resaltar que la distribución que mayor tiempo le toma alcanzar su estabilización es la 1; esto debido a la presencia de un intransigente en las capas L_2 (red mundo pequeño) y L_3 (red libre de escala).

Otro punto importante surge de la observación de la Fig. 9 en la evolución del estado de opinión promedio $\langle S \rangle$ de la distribución 5 dentro de los tres casos de red. Esta distribución caracterizada por tener la presencia de dos intransigentes en cada una de las capas de la red es la que presenta una mayor pendiente en todas las situaciones; su estabilización es más rápida comparada a las otras distribuciones.

En la Fig. 10 se presenta la desviación estándar de cada distribución de la Tabla 2. Se observa que la evolución de la curva para la distribución 0 (azul) tiende a cero para los tres casos, lo cual nos muestra que, en ausencia de individuos intransigentes, la red multicapa tiende al consenso.

Debido a la presencia de intransigentes se observa que las desviaciones estándar para cada distribución presentan distintas evoluciones, y estas alcanzan el equilibrio para valores diferentes de cero. Lo anterior

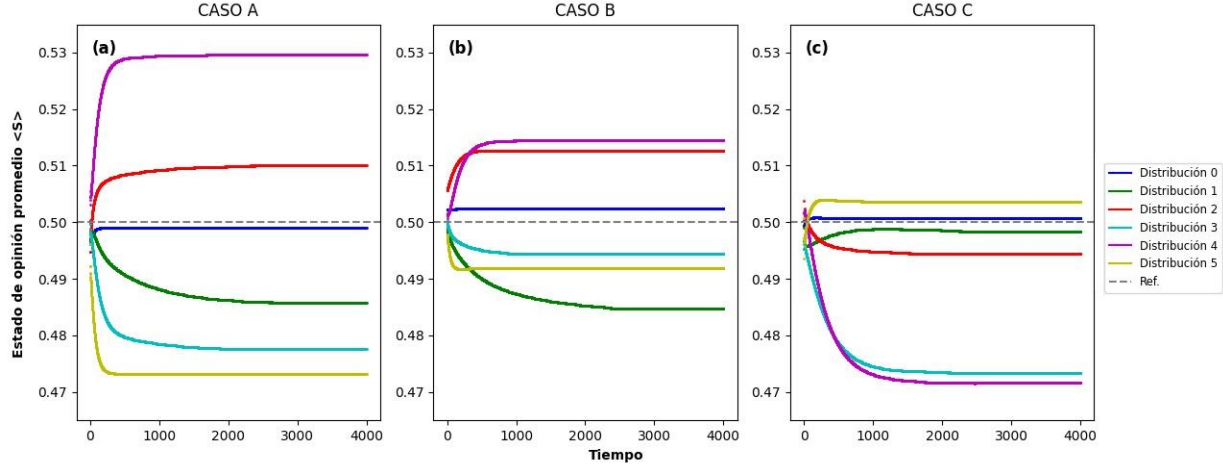


Fig. 9.— Evolución del estado de opinión promedio $\langle S \rangle$ cuando existen individuos intransigentes en la red multicapa (configuración 10 de la 1) para cada caso. Cada distribución indica el número de intransigentes presentes en cada capa de la red (ver Tabla 2).

indica que estos grupos sociales no alcanzan el consenso. En la Fig. 10(a) observamos que el comportamiento de la dispersión de opinión para las distribuciones 1 (verde) y 2 (rojo) es similar llegando a estar casi sobrepuestas. Las distribuciones que muestran un mayor alejamiento del consenso en todos los casos corresponden a la 4 (fucsia) y 5 (mostaza), que denotan situaciones en las que existe un individuo intransigente en cada capa y dos individuos intransigentes en cada capa, respectivamente. Entonces, se constata el hecho de que mientras más intransigentes estén presentes en la red multicapa, estas tienden a alejarse del consenso.

Para finalizar, observe que en las distribuciones 1 (verde), 2 (rojo) y 3 (celeste), el número de intransigentes a lo largo de la red multicapa es de 2. Estos 2 individuos están distribuidos teniendo a uno por capa y dejando una capa libre de intransigentes. Por lo tanto, podemos resaltar que, entre estas tres distribuciones, la 3 (cuando un intransigente está presente tanto en la capa L_1 : Red aleatoria como en la capa L_2 : Red mundo pequeño) es la que está más alejada del consenso.

5. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Se estudiaron redes multicapa analizando la dinámica de opinión de los individuos presentes mediante un modelo de evolución discreta. Se consideraron distintas configuraciones de redes multicapa haciendo que las capas involucradas presenten distintas combinaciones de topología de red (ver Tabla 1). Mediante estas configuraciones se estudiaron tres casos (ver § 3.2.1) donde dos de ellos presentan una semejanza a grupos sociales de la vida real y el otro tiene características más artificiales.

El caso A simula la existencia de una alta conectividad entre los individuos de las redes multicapa mostrando así que las configuraciones 8 (L_1 : Red libre de escala, L_2 : Red libre de escala, L_3 : Red aleatoria) y 9 (L_1 : Red libre de escala, L_2 : Red libre de escala, L_3 : Red mundo pequeño) son aquellas que toman mayor tiempo en alcanzar la estabilidad.

El caso B representa cuando los vínculos entre los

individuos presentes en las capas son pocos obteniendo así que las configuraciones 5 (L_1 : Red mundo pequeño, L_2 : Red mundo pequeño, L_3 : Red aleatoria) y 8 (L_1 : Red libre de escala, L_2 : Red libre de escala, L_3 : Red aleatoria) llegan a su valor de estabilización entre los 170 y 190 pasos, siendo estas las configuraciones con mayor transitorio.

En el caso C, las topologías de red presentan características las cuales no son muy cercanas a la realidad; sin embargo, estas redes artificiales nos sirven como objeto de estudio y también desde una perspectiva conceptual. El análisis de la evolución del estado de opinión en estos supuestos grupos sociales nos lleva a concluir que la configuración 10 (L_1 : Red aleatoria, L_2 : Red mundo pequeño, L_3 : Red libre de escala) es aquella que presenta un mayor transitorio antes de lograr su estabilización en aproximadamente 235 pasos de tiempo.

Se obtuvieron las respectivas desviaciones estándar para cada configuración de red multicapa dentro de los tres casos considerados. Mediante la observación de la evolución de las desviaciones estándar se concluye que, después de un cierto tiempo es posible alcanzar la situación de consenso. Sin embargo, para algunas configuraciones de redes multicapa alcanzar dicha situación tomaría tiempos mayores a los 600 pasos.

Posteriormente se estudió el efecto de la presencia de los individuos intransigentes en la configuración 10 de red multicapa (L_1 : Red aleatoria, L_2 : Red mundo pequeño, L_3 : Red libre de escala). Mediante esta red, los intransigentes fueron repartidos entre las capas generando diferentes distribuciones de estudio (ver Tabla 2). Se obtuvieron diferentes curvas de la evolución del estado de opinión promedio $\langle S \rangle$ para las distintas distribuciones que fueron aplicadas dentro del contexto de cada caso mencionado en § 3.2.1. La distribución 4 en la cual existe la presencia de un individuo intransigente en cada una de las capas de la red, es aquella que presentó un mayor valor de $\langle S \rangle_{eq}$ en todos los casos.

También se analizaron las curvas de evolución de la desviación estándar para las distintas distribu-

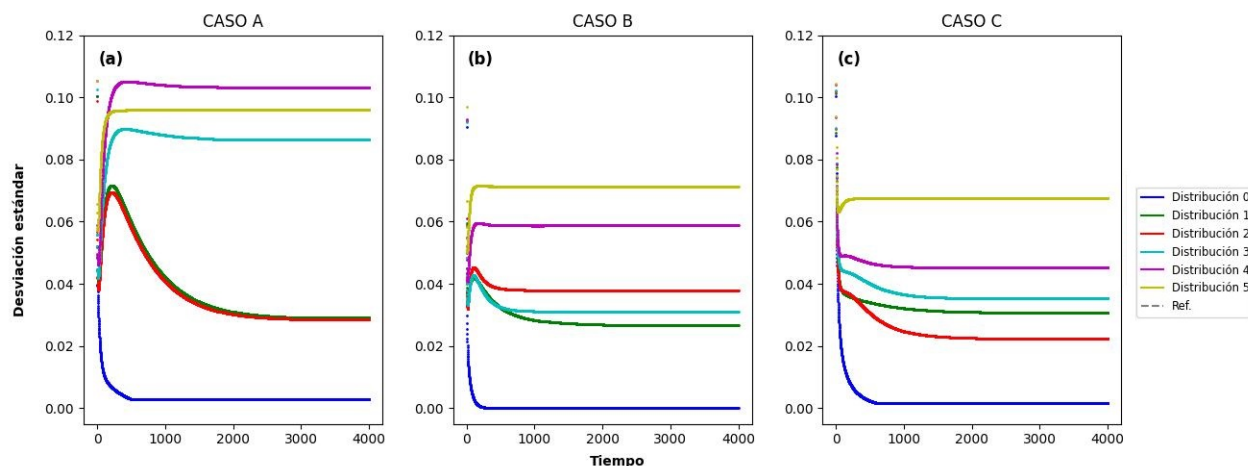


Fig. 10.— Evolución de la desviación estándar en relación a la Fig. 9.

ciones demostrando que a medida que aumenta el número de individuos intransigentes en la red multicapa, esta tiende a alejarse más del consenso.

Mediante este trabajo se mostró la importancia de las topologías de red en las redes multicapa y cómo la combinación de estas a lo largo de la red genera diferentes comportamientos del estado de opinión promedio $\langle S \rangle$ hasta alcanzar su estabilización. Por otro lado, se mostró el alejamiento del consenso y la dispersión de opiniones debido a la presencia de los individuos intransigentes en las redes multicapa.

Este trabajo marca los primeros lineamientos en el estudio de redes multicapa y puede ser ampliado a otras situaciones como ser: Considerar otras combinaciones de topologías de red; incluir más indivi-

duos intransigentes en las diferentes capas para así poder hallar una correlación entre el número de intransigentes y el tiempo de estabilización del sistema; además de estudiar otros fenómenos sociales tales como el surgimiento de polarización.

AGRADECIMIENTOS

GMRA agradece el financiamiento del programa de investigación e innovación Horizonte 2020 de la Unión Europea en virtud del acuerdo de subvención Marie Skłodowska-Curie N° 101034383.

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no existe conflicto de intereses respecto a la publicación de este documento.

REFERENCIAS

- Balenzuela, P., Pinasco, J. P., & Semeshenko, V. 2015, PloS ONE, 10, e0139572
- Barabási, A. L. 2003, *Linked: The New Science of Networks* (Perseus Publishing, Cambridge)
- Barabási, A. L. & Albert, R. 1999, *Science*, 286, 509
- Degroot, M. H. 1974, *Journal of the American Statistical Association*, 69, 118
- Domenico, M. D. 2022, *Multilayer Networks: Analysis and Visualization-Introduction to muxViz with R* (Springer, Cham)
- Erdős, P. & Rényi, A. 1960, *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences*, 5, 17
- Galam, S. 2013, *Sociophysics: A Physicist's Modeling of Psychological Phenomena* (Springer, New York)
- Galam, S. & Jacobs, F. 2007, *Physica A*, 381, 366
- Granovetter, M. S. 1973, *American Journal of Sociology*, 78, 1360
- Holley, R. A. & Liggett, T. M. 1975, *The Annals of Probability*, 643
- Hu, H. B., Li, C. H., & Miao, Q. Y. 2017, *Advances in Complex Systems*, 20, 1750015
- Ising, E. 1925, *Zeitschrift für Physik*, 31, 253
- Krause, S. M. & Bornholdt, S. 2012, *Physical Review E*, 86, 056106
- Kuperman, M. & Zanette, D. 2002, *European Physical Journal B*, 26, 387
- Maity, S. K., Manoj, T. V., & Mukherjee, A. 2012, *Physical Review E*, 86, 036110
- Nardini, C., Kozma, B., & Barrat, A. 2008, *Physical Review Letters*, 100, 158701
- Noble, J., Davy, S., & Franks, D. W. 2004, in *From Animals to Animats 8: Proceedings of the Seventh (ie Eighth) International Conference on Simulation of Adaptive Behavior*, Vol. 8, MIT Press, 395
- Schweitzer, F. 2018, *Physics Today*, 71, 40
- Subieta-Frías, V. & Ramírez-Ávila, G. M. 2017, *Revista Boliviana de Física*, 31, 3
- . 2023, *AIP Conference Proceedings*, 2731, 050003
- Watts, D. J. & Strogatz, S. H. 1998, *Nature*, 393, 440
- Xiong, F. & Liu, Y. 2014, *Chaos*, 24, 013130 1
- Zanette, D. H. 2009, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 367, 3311