

# USO DE PERIODICIDADES EN LA DESCRIPCIÓN DE LA DINÁMICA Y SINCRONIZACIÓN EN UN SISTEMA TRANSMISOR RECEPTOR DE LÁSERES

## USE OF PERIODICITIES IN THE DESCRIPTION OF THE DYNAMICS AND SYNCHRONIZATION IN A LASER TRANSMITTER-RECEIVER SYSTEM

DANIEL POLO-ALCOBA<sup>1,a†</sup> & GONZALO MARCELO RAMÍREZ-ÁVILA<sup>2,3,4,b‡</sup>

<sup>1</sup> Carrera de Física, Universidad Mayor de San Andrés. Campus Universitario, c. 27 s/n Cota-Cota, Casilla 8635. La Paz-Bolivia.

<sup>2</sup> Namur Institute for Complex Systems (naXys), Université de Namur, Rue de Bruxelles 61, B-5000 Namur, Belgium.

<sup>3</sup> Instituto de Investigaciones Físicas, Universidad Mayor de San Andrés. Campus Universitario, c. 27 s/n Cota-Cota, Casilla de Correos 8635. La Paz-Bolivia. &

<sup>4</sup> Planetario Max Schreier, Universidad Mayor de San Andrés. Campus Universitario, c. Federico Zuazo 1976. La Paz-Bolivia.

(Recibido 31 de julio de 2023; aceptado 2 de diciembre de 2023)

<https://doi.org/10.53287/qpea8929bo19y>

### RESUMEN

En este trabajo, presentamos los resultados de la integración numérica de un modelo matemático que describe la dinámica de dos láseres acoplados unidireccionalmente. La investigación se centró en la caracterización de la dinámica del sistema, con un enfoque en la búsqueda de regiones de sincronización en relación a términos como el ruido, el retardo, y los parámetros de control asociados a la intensificación del ancho de línea y la retroalimentación. La dinámica del sistema se caracterizó mediante la obtención de diagramas de bifurcación y de planos de parámetros basados el cálculo de periodicidades. Las regiones de sincronización se identificaron utilizando dos indicadores, y se estableció una metodología para la descripción e interpretación de estas zonas de sincronización.

*Palabras clave:* Sincronización caótica – Láseres acoplados – Dinámica no Lineal.

### ABSTRACT

We present the results of the numerical integration of a mathematical model describing the dynamics of two unidirectional coupled lasers. The investigation centered on the characterization of the system dynamics, with a focus on the search for synchronization regions. In which, we take into account related terms such as noise, delay as well as the control parameters associated with line width enhancement and feedback. Bifurcation diagrams and periodicity-based parameter planes are essential to characterize the system's dynamic behavior. Finally, synchronization regions were identified using two indicators, and a protocol was proposed to describe and interpret the system's dynamic behavior associated with these synchronization regions.

*Subject headings:* Chaotic synchronization – Coupled lasers – Nonlinear Dynamics.

### 1. INTRODUCCIÓN

En la última década del siglo XIX, Henri Poincaré, al estudiar el problema de los tres cuerpos, descubrió la existencia de órbitas que no son periódicas, están acotadas, y no tienden a un punto fijo; este hecho dio lugar al surgimiento de lo que hoy conocemos como dinámica no lineal. Posteriormente, este comportamiento sería denominado como caótico, el cual es un tipo específico de evolución irregular producido por un sistema determinista. Kaplan & Glass (1995) definen el comportamiento caótico con las siguientes

características principales: dinámica acotada, es decir, que no tiende al infinito; determinismo, que implica una dinámica del sistema bien definida; sensibilidad a las condiciones iniciales, lo que significa que las trayectorias de dos puntos inicialmente cercanos, se alejan exponencialmente a medida que transcurre el tiempo; y aperiodicidad, situación que describe la no repetibilidad de un mismo punto en el espacio de fases.

En el estudio de la dinámica de sistemas caóticos existen varias herramientas para caracterizar su comportamiento. Nicolis (1995) detalla la caracterización a través de diagramas de bifurcación; Por otro lado, Ramírez-Ávila & Gallas (2011) proponen una caracterización basada en las periodicidades del sistema; y Strogatz (2018) hace referencia al estudio de

<sup>a</sup><https://orcid.org/0009-0000-7858-1093>

<sup>b</sup><https://orcid.org/0000-0003-4522-9012>

<sup>†</sup>Email: [dpoloe@fcpn.edu.bo](mailto:dpoloe@fcpn.edu.bo)

<sup>‡</sup>Email: [mravila@fiumsa.edu.bo](mailto:mravila@fiumsa.edu.bo)

la dinámica de los sistemas caóticos mediante el uso de exponentes de Lyapunov. Como se puede observar, existen diversas formas de describir y detallar la dinámica de los sistemas caóticos.

La sincronización es un fenómeno en el cual dos o más osciladores autosostenidos ajustan sus ritmos debido a una interacción débil en magnitud, según lo señalan Pikovsky et al. (2001). De manera análoga, la sincronización caótica hace referencia al ajuste de cierta propiedad de su movimiento a un comportamiento común debido a un acoplamiento o una fuerza que actúa sobre los sistemas, ya sea periódica o aleatoria, como lo mencionan Pecora & Carroll (1990).

El fenómeno de sincronización en todas sus variantes como lo detallan Pikovsky et al. (2001) y Ramírez-Ávila (2007) se evidenció en una amplia variedad de campos. En la biología: Conradt & List (2008) afirman que los grupos de animales tienden a tomar decisiones sincronizadas sobre migración, anidación y actividades en común, como la cría cooperativa o la caza, que afectan a su supervivencia y reproducción; Buck (1935) detalla sobre la observación realizada por Purcell y Morse en Filipinas sobre la sincronización de los destellos luminosos emitidos por las luciérnagas y cuya modelación es explicada en detalle por Ramírez-Ávila et al. (2019). Por otro lado, en la sociología, Subieta-Frias & Ramírez-Ávila (2017) caracterizan la opinión que pueden llegar a tomar un grupo de individuos a partir de la influencia de una fuente externa, la cual puede inducir en algunos de los individuos la toma de una decisión consensuada (sincronizada). En un sistema relacionado con psicología, Song & Yang (2009) sientan las bases para el estudio de la sincronización de las emociones en un grupo de individuos. Además, en la economía, Volos et al. (2012) presentan un modelo con dos ciclos económicos acoplados que debido a la interacción entre los mismos alcanzan un enganche de fases que es una de las características de la sincronización.

La sincronización completa fue ampliamente estudiada y de acuerdo con Boccaletti et al. (2002) ocurre cuando tanto la amplitud como la fase de los sistemas están enganchadas. Para caracterizar la sincronización completa se deben definir indicadores, los cuales dependen del sistema; por ejemplo: Bustos-Espinoza & Ramírez-Ávila (2016) acoplan dos osciladores conocidos como mapas logísticos, y definen un indicador el cual está dado por la distancia euclidiana de la variable dinámica de cada uno de los mapas encontrando regiones características de sincronización conocidas como lenguas de Arnold; mientras que, Abarbanel et al. (2001) acoplan dos láseres semiconductores en un sistema maestro-esclavo y definen un indicador para la sincronización, el cual está dado por el promedio del cociente de la distancia euclidiana de las variables de los sistemas, entre el promedio de las variables asociadas al sistema maestro.

Los láseres semiconductores deben esta denominación debido a que funcionan mediante la emisión estimulada en semiconductores que actúan como medios activos, donde los niveles de energía se expan-

den debido a los iones en la estructura cristalina, formando bandas de energía. La banda de valencia, ocupada por electrones, está debajo de la banda de conducción, separadas por el denominado gap o espaciamiento que es una región sin niveles de energía disponibles. En una unión  $p$ - $n$ , las bandas de energía se configuran de modo que los electrones de la banda de conducción en la región  $n$  no pueden cruzar a la región  $p$  y viceversa. Al aplicar un campo eléctrico, esta configuración se altera, permitiendo el paso de portadores de carga y facilitando la recombinación de electrones y huecos. En materiales de gap directo, esta recombinación resulta en la emisión de fotones y, si la inversión de población alcanza un umbral específico, se produce la emisión estimulada de un láser semiconductor, según Alonso Fernández et al. (2010).

En el presente artículo se abordará el estudio de un sistema físico compuesto por dos láseres semiconductores acoplados haciendo énfasis en su dinámica y la sincronización que pueden alcanzar. Existen varios trabajos previos relacionados con estas áreas, a continuación detallamos algunos de ellos: En relación con la dinámica. Heiligenthal et al. (2013) realizan un estudio de láseres semiconductores acoplados con base en las ecuaciones propuestas por Lang-Kobayashi para el campo eléctrico y número de portadores, utilizando los exponentes de Lyapunov y mostrando el surgimiento de un comportamiento caótico en términos del parámetro asociado a la corriente proporcionada al sistema. Blackbeard et al. (2011) estudian la dinámica de tres láseres acoplados utilizando para su descripción diagramas de bifurcación y exponentes de Lyapunov. En la misma línea de sincronización de láseres acoplados. Annovazzi-Lodi et al. (1996) usando el modelo propuesto por Lang-Kobayashi y por medio de integración numérica, demostraron que los láseres se pueden sincronizar variando el parámetro asociado a la retroalimentación óptica. Mirasso (2000), demuestra que su modelo propuesto para la dinámica del campo eléctrico y número de portadores dentro de la cavidad de dos láseres acoplados podía alcanzar la sincronización cuando uno de ellos influía a través de la inyección en un láser receptor. Además, se muestra también que un mensaje puede codificarse en la señal emitida por el láser emisor, transmitirse a través de una fibra óptica y decodificarse en el láser receptor.

A lo largo de este trabajo, se describe la dinámica de dos láseres acoplados unidireccionalmente; además, se determinan regiones de sincronización y se propone un método para caracterizar la dinámica en dichas zonas.

El presente artículo está estructurado de la siguiente manera: en la sección 2, se detalla el modelo utilizado y se explica el significado de los parámetros de control; también se introducen los indicadores de sincronización. En la sección 3, se da a conocer la metodología utilizada y se muestran los resultados numéricos obtenidos. Finalmente, en la sección 4, se presentan las conclusiones derivadas de nuestra investigación, junto con algunas perspectivas para futuros trabajos en este campo.

## 2. MODELO

Existen varios modelos que describen la dinámica de dos láseres acoplados. Debido a la consideración de varios aspectos importantes tales como la presencia de ruido y la inclusión de retardo, para caracterizar la dinámica de dos láseres acoplados, en una configuración maestro-esclavo, se escogió el modelo propuesto por Mirasso (2000) dado por el sistema descrito en la Ec. (1). Este modelo proporciona ecuaciones que describen la variación del campo eléctrico  $E_{t,r}$  y del número de portadores  $N_{t,r}$  dentro de la cavidad, donde  $t$  y  $r$  hacen referencia al sistema maestro y esclavo, respectivamente.

$$\begin{aligned} \frac{dE_{t,r}}{dt} &= (1 + j\alpha_{t,r}) \left( G_{t,r} - \frac{1}{\tau_{t,r}} \right) \frac{E_{t,r}}{2} \\ &\quad + \gamma E_{t,r}(t - \tau) e^{j\omega_{t,r}\tau} \\ &\quad + \kappa_\tau E_{\text{ext}}(t) e^{-j\Delta\omega t} \\ &\quad + \sqrt{2\beta N_{t,r}(t)} \xi(t) \\ \frac{dN_{t,r}}{dt} &= \frac{I}{e} - \frac{1}{\tau_n} N_{t,r}(t) - G_{t,r} |E_{t,r}|^2 \\ G_{t,r} &= \frac{g(N_{t,r} - N_0)}{1 + s|E_{t,r}|^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Los parámetros son:  $g = 1.5 \times 10^{-8} \text{ ps}^{-1}$  es el parámetro de ganancia,  $s = 5 \times 10^{-7}$  es el coeficiente de saturación de ganancia,  $\alpha = 5$  es el parámetro asociado a la intensificación del ancho de línea,  $\beta = 1.1 \times 10^{-9} \text{ ps}^{-1}$  es la tasa de emisión espontánea,  $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$  es la carga electrónica,  $\tau_n = 2 \text{ ns}$  es el tiempo de vida del portador,  $\tau_{t,r} = 2 \text{ ps}$  es el tiempo de vida del fotón,  $N_0 = 1.5 \times 10^8$  es el número de portadores en la transparencia,  $\gamma = 30 \text{ ns}^{-1}$  es el coeficiente de retroalimentación,  $\tau$  es el tiempo de ida y vuelta en la cavidad externa,  $\Delta\omega$  es la diferencia entre las frecuencias ópticas de los láseres cuando estos están desacoplados,  $I = 44 \text{ mA}$  es la corriente de sesgo y  $\omega_{t,r} \approx 1.2 \times 10^3 \text{ ps}^{-1}$  es la frecuencia angular de ambos láseres bajo operación de onda continua,  $\kappa_\tau = 18 \text{ ns}^{-1}$  es el coeficiente de acoplamiento. Es importante destacar que en las siguientes secciones modificaremos algunos parámetros de control, en caso de no especificar dichas variaciones, se debe asumir que se han utilizado los valores de referencia presentados anteriormente.

El sistema tiene presencia de varios términos importantes, como son:  $E_{t,r}(t - \tau)$  que indica que estamos ante ecuaciones diferenciales con retardo, las ecuaciones diferenciales con retardo involucran derivadas dependientes del pasado, usadas para modelar sistemas con influencia temporal pasada; el proceso aleatorio de emisión espontánea es modelizado con un término de ruido Gaussiano  $\xi(t)$ , usando una distribución normal con una varianza de 25 y media igual a cero; el término  $\kappa_\tau E_{\text{ext}}$  tiene en cuenta la señal de entrada en el receptor y  $\kappa_\tau$  es el parámetro de acoplamiento del campo inyectado en el láser

esclavo, cabe recalcar que este término sólo ejerce influencia en el láser receptor.

El sistema de ecuaciones diferenciales (1), se descompone en seis ecuaciones diferenciales, con partes reales e imaginarias determinadas por la presencia de  $j$  (unidad imaginaria): dos para las componentes  $x$  e  $y$  del campo eléctrico correspondiente al transmisor ( $E_{tx}, E_{ty}$ ), dos para las mismas componentes correspondientes al receptor ( $E_{rx}, E_{ry}$ ) y dos para los números de ocupación de ambos láseres ( $N_t, N_r$ ). Entonces, el campo complejo del láser está definido por  $E = E_x + jE_y$  se tendrá que la potencia óptica de salida en ambos casos, serán:

$$P_E = E_{tx}^2 + E_{ty}^2 \quad \text{y} \quad P_R = E_{rx}^2 + E_{ry}^2 \quad (2)$$

Con el fin de caracterizar la sincronización de dos láseres acoplados, se calculará el cociente  $P_R(t)/P_E(t)$  de las potencias de salida para luego obtener su valor medio, al cual denominaremos como el índice de sincronización  $\langle \varepsilon_P \rangle = \langle P_R(t)/P_E(t) \rangle$ , este valor será mayor o igual a uno, ya que estamos trabajando con láseres idénticos, siendo la única diferencia entre ellos las condiciones iniciales; además, se usará un segundo indicador al cual llamaremos error medio del índice de sincronización  $\Delta \varepsilon_P \% = \sigma_P / N^{1/2}$ , dado por el cociente de la desviación estándar del índice de sincronización entre la raíz cuadrada del número de datos considerados, este valor tiende a cero en presencia de sincronización.

## 3. METODOLOGÍA Y RESULTADOS

El modelo propuesto fue resuelto por integración numérica empleando el software de acceso abierto XPPAUT desarrollado por Ermentrout (2002), el cual a su vez utiliza para la integración de ecuaciones diferenciales estocásticas el método de Euler con paso adaptativo. Las condiciones iniciales para el láser transmisor son  $(E_{tx0}, E_{ty0}, N_{t0}) = (3.2, 0.4, 1.5 \times 10^8)$ , mientras que para el láser receptor las condiciones iniciales son  $(E_{rx0}, E_{ry0}, N_{r0}) = (4.3, 0.6, 1.5 \times 10^8)$ , y los parámetros de control y términos usados toman los valores mencionados en la sección 2. Tanto para el estudio de la dinámica como para la búsqueda de regiones de sincronización del sistema, las series temporales se generaron de la siguiente manera: Se observó que el sistema alcanzaba la estabilidad en aproximadamente 120 ns, es por este motivo que se toma este valor como tiempo final. Se optó por tomar un valor pequeño de 1 ps como base de paso de tiempo para garantizar la exactitud de los resultados numéricos obtenidos comparados con respecto a otros métodos de integración más sofisticados como el descrito por Honeycutt (1992); lo anterior implica hacer 120000 cálculos para cada serie temporal.

## 3.1. Caracterización de la Dinámica

Para la obtención de los diagramas de bifurcación mostrados en la Fig. 1, se debe trabajar con el sistema en su situación estable, es por eso que se optó por tomar como transitorio 110 ns, es decir, se trabajó con los 10000 pasos de tiempo finales de la serie temporal, de los cuales buscamos sus máximos y

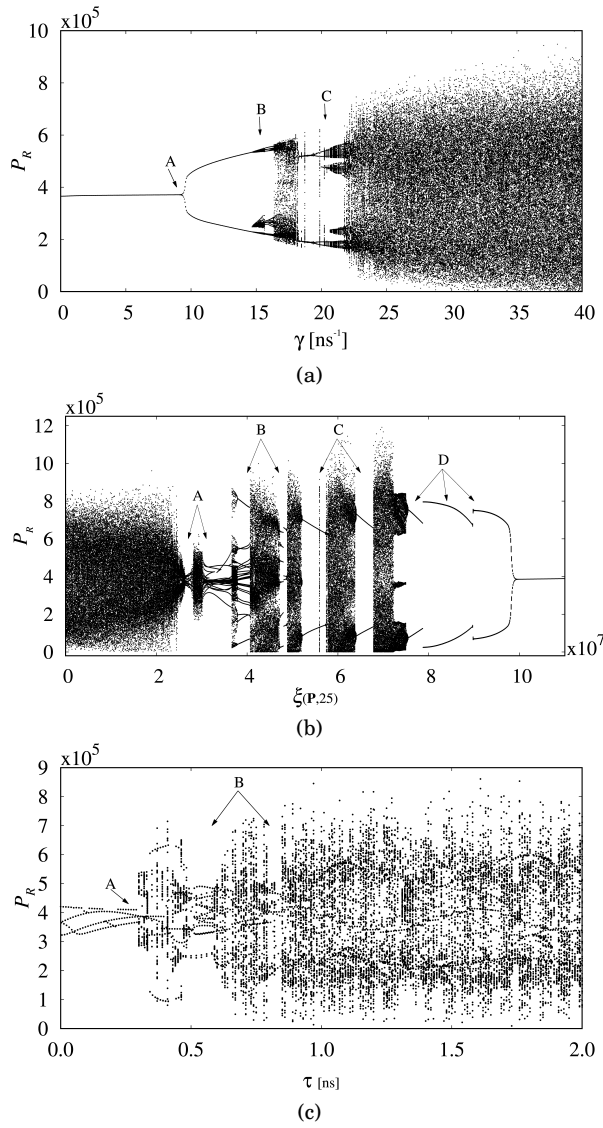


Fig. 1.— Diagramas de bifurcación que muestran la dinámica de la potencia de salida del láser receptor en función: (a) del parámetro de control  $\gamma$ , (b) del promedio asociado a la distribución normal, la cual está relacionada con el término asociado al ruido  $\xi(t)$ , (c) del retardo  $\tau$ .

mínimos relativos. Se realizó este cálculo para 800 valores del parámetro de control. Dando así un total de  $8 \times 10^6$  cálculos.

Con el fin de tener una comprensión más profunda de la dinámica del sistema, se obtienen los planos de parámetros que muestren la periodicidad del sistema, de manera similar a lo realizado por Ramírez-Ávila & Gallas (2011). De forma análoga a los diagramas de bifurcación, debemos buscar los máximos y mínimos de las series temporales del sistema. Además, se deben establecer condiciones para determinar el comportamiento en sistemas continuos (o por lo menos para el modelo estudiado dado que este presenta mínimas fluctuaciones). En la Fig. 2(c), se pueden observar pequeñas fluctuaciones en la potencia de salida del láser receptor. Estas fluctuaciones son del orden de las décimas. Sin embargo, la escala del sistema es del orden de  $10^5$ , por lo que es posible

definir un error, el cual es de una unidad. Así, se caracteriza la dinámica de la siguiente manera:

- Se considera como comportamiento estacionario a la situación en la cual todos los máximos y mínimos relativos en la serie temporal difieren a lo sumo en una unidad como se muestra en la Fig. 2(c), donde se hace notar que a diferencia de las ecuaciones diferenciales sin ruido donde la situación de punto fijo implica tener un valor constante de la variable dinámica, la estacionariedad en el caso estocástico implica una señal ruidosa (fluctuación) de pequeña amplitud.
- La periodicidad de una serie temporal está dada por la siguiente relación: periodicidad =  $np$ , donde  $np$  hace referencia al número de puntos máximos o mínimos relativos que le toma al sistema en volver a una situación aproximada a la inicial, donde la diferencia máxima entre estados correspondientes es de una unidad. Las Figs. 2(d) y 2(e) ilustran los casos de periodicidad 1 y 2 respectivamente.
- Una serie temporal presenta comportamiento caótico si no cumple con ninguna de las dos condiciones mencionadas anteriormente.

Dadas estas condiciones, integramos las ecuaciones del sistema para obtener las correspondientes series temporales variando dos parámetros de control, por lo que obtenemos los denominados planos de parámetros. Se realizó este cálculo para 81 valores distintos del término asociado al retardo y el parámetro de control asociado a la retroalimentación, lo que sumó un total de  $6.4 \times 10^7$  cálculos.

En el diagrama de bifurcación de la Fig. 1(a), se pueden apreciar los diferentes comportamientos que presenta el sistema a medida que incrementamos el parámetro de control  $\gamma$  asociado a la retroalimentación. Desde el inicio hasta el punto (A), se observa que el sistema exhibe un comportamiento estacionario. Posteriormente, se ve un desdoblamiento de periodicidad hasta el punto (B), seguido de una región caótica y la reaparición de comportamiento periódico, culminando en el punto (C). A continuación de este punto, se observa nuevamente una región caótica.

En la Fig. 1(b), se presenta el diagrama de bifurcación correspondiente al promedio de la distribución normal asociada al ruido generado por la emisión espontánea. Inicialmente, se observa un comportamiento caótico, donde surgen algunas regiones que parecen ser periódicas, como se puede apreciar en los puntos (A), (B) y (C); Posteriormente, en la región (D), se observa un comportamiento de periodicidad 1; Después de la región (D), se puede observar un comportamiento estacionario.

En la Fig. 1(c) se presenta el diagrama de bifurcación asociado al retardo, donde predomina el comportamiento caótico; sin embargo, se observan regiones en las cuales el comportamiento da indicios de periodicidad. Según crece  $\tau$  hasta el punto (A), se observa una región que presenta las características de periodicidad, pero en realidad se trata de una zona estacionaria donde la potencia de salida del láser se modifica según variamos  $\tau$ . Posteriormente, se señalan las regiones (B) las cuales presentan un comportamiento que indica periodicidad.



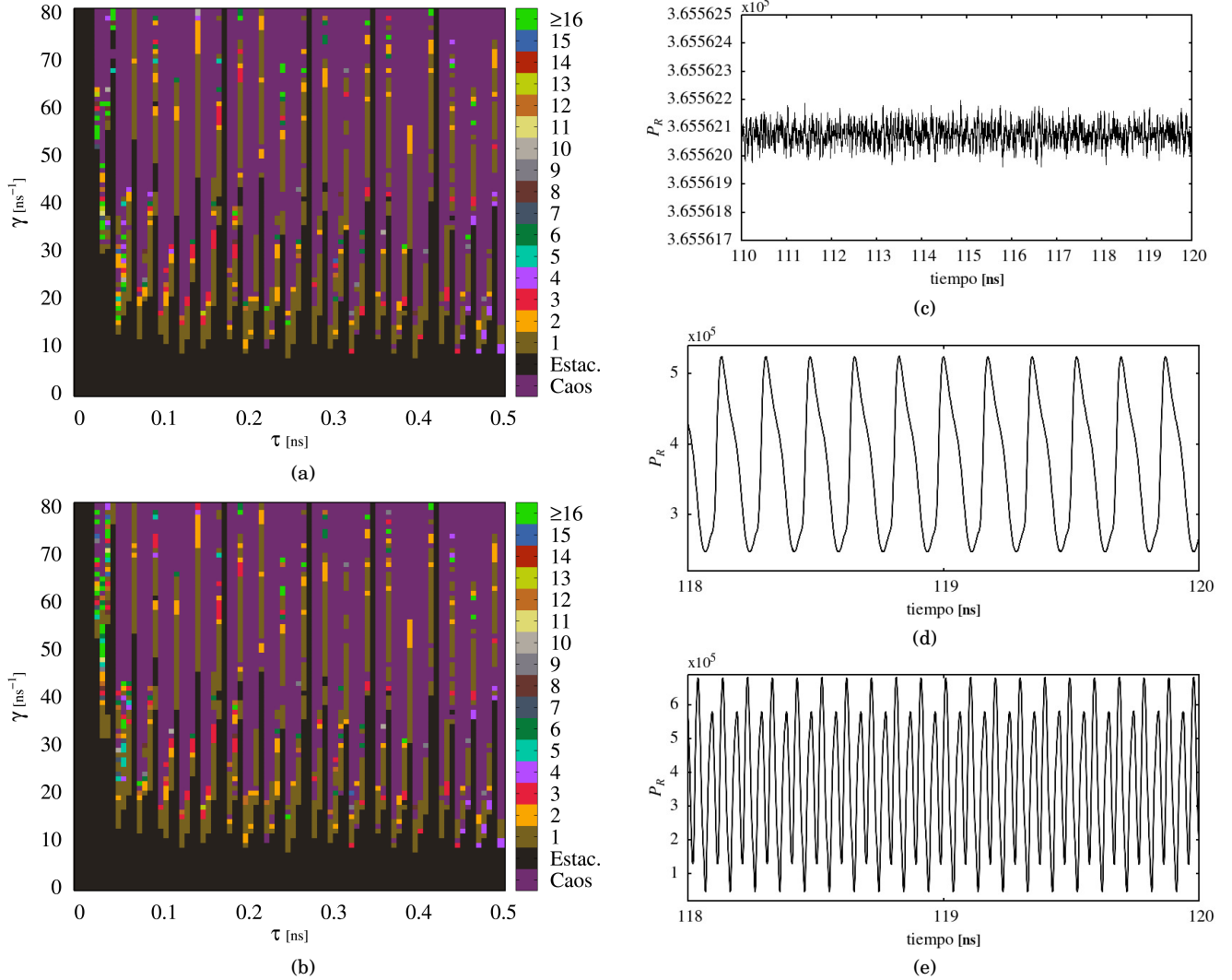


Fig. 2.— Periodicidades en el espacio bidimensional  $\gamma$  vs.  $\tau$ , para el modelo de dos láseres acoplados para el: (a) láser receptor, (b) láser transmisor. Series temporales que muestran la variedad de comportamientos dinámicos del láser receptor: (c) estacionario, el cual presenta pequeñas fluctuaciones en relación al orden de magnitud de las amplitudes de las oscilaciones del sistema,  $\gamma = 2 \text{ ns}^{-1}$ , (d) regular con periodicidad 1,  $\gamma = 19 \text{ ns}^{-1}$ , (e) regular con periodicidad 2,  $\gamma = 13 \text{ ns}^{-1}$ ; siendo en todos los casos el valor del retardo  $\tau = 0.30625 \text{ ns}$ .

En las Figs. 2(a)-2(b), se puede observar los planos de parámetros  $\gamma$  vs.  $\tau$ , tanto para el láser transmisor como para el láser receptor, donde se muestran los comportamientos de las potencias de salida. Cabe destacar la similitud en el comportamiento que presentan ambos sistemas, donde predominan los regímenes caóticos y estacionarios. En el límite entre las regiones caótica y estacionaria se puede observar que se destacan zonas de periodicidad 1, donde además aparecen zonas de periodicidad mayor. Se constata que según crece el término  $\tau$  surgen regiones estrechas de comportamiento estacionario.

### 3.2. Caracterización de la sincronización

Para caracterizar la sincronización del sistema, se utilizaron el índice de sincronización y el error del índice de sincronización, posteriormente se propone un método para obtener las periodicidades de las regiones de sincronización.

La metodología usada para encontrar las regiones

de sincronización es similar a la usada en el cálculo de periodicidades. Inicialmente, se variaron dos parámetros de control para 81 valores distintos, tomando un transitorio de 110 ns, lo que implica realizar aproximadamente  $6.4 \times 10^7$  cálculos. Posteriormente, se realiza el cálculo de los indicadores; así, para el índice de sincronización, se trunca el mismo cuando alcanza el valor 2, esto por la existencia de valores muy altos que dificultan su distinción en los diagramas de colores. Similarmente, se trunca el error del índice de sincronización al 5%. Lo anterior significa que para los casos en los que los valores de  $\langle \varepsilon_P \rangle$  y  $\Delta \varepsilon_P \%$  son mayores a 2 y a 5% respectivamente, estos estarán representados en amarillo en los planos de parámetros en los que se utilizan estos indicadores.

Se realizó también un estudio de la dinámica de las regiones de sincronización del sistema en términos de sus periodicidades, de la siguiente manera: Las Figs. 2(a)-2(b) representan las periodicidades

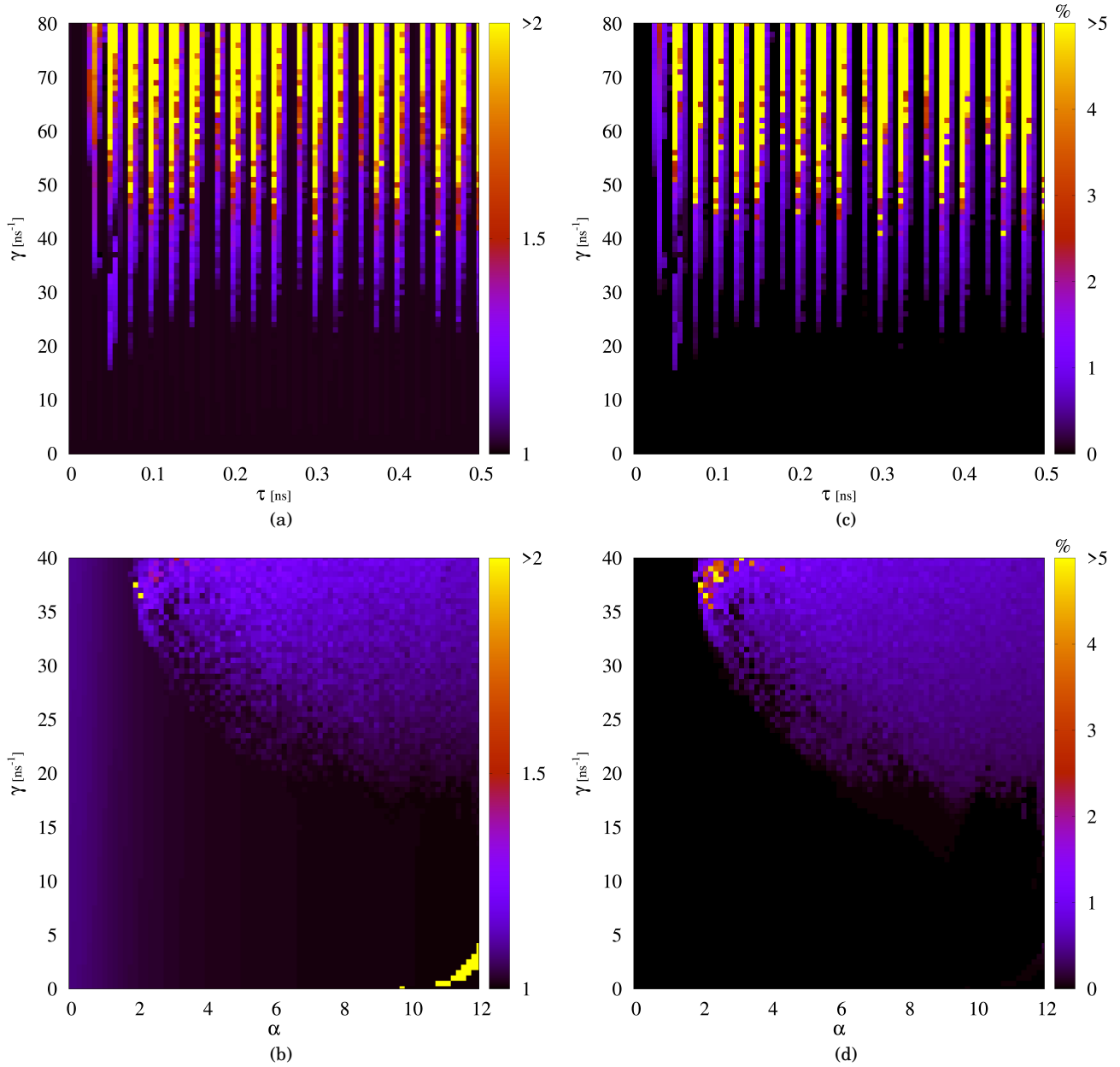


Fig. 3.— Caracterización de la sincronización de dos láseres acoplados unidireccionalmente por medio del índice de sincronización y el error del índice de sincronización.  $\gamma$  vs.  $\tau$ : (a) índice de sincronización, (b) Error del índice de sincronización.  $\gamma$  vs.  $\alpha$ : (c) índice de sincronización, (d) error del índice de sincronización.

del láser receptor y transmisor, respectivamente. A través de la información de estos dos espacios de parámetros, podemos determinar el comportamiento de ambos láseres, ya sea periódico, caótico o estacionario. En caso de que ambos láseres exhiban el mismo comportamiento estaríamos hablando de una cierta sincronización, la cual debemos verificar mediante el error del índice de sincronización, este indicador debe ser menor o igual a 0.1 %.

En las Figs. 3(a) y 3(c), se presenta el índice de sincronización y error del índice de sincronización, respecto al parámetro de control asociado a la retroalimentación y el término de retardo. En ambas gráficas se puede observar una cierta similitud, donde se destacan unos picos oscuros que a medida que crece

$\tau$  hay alternancias, de manera similar a lo que se observó en el cálculo de periodicidades para los mismos términos, como se observan en las Figs. 2(a)-2(b).

En la Fig. 3(b), se observa el índice de sincronización para  $\gamma$  vs.  $\alpha$ , donde se nota que este índice es mayor a 1, lo cual es plausible, ya que está determinado por el cociente de la potencia del láser receptor entre la potencia del láser transmisor. Aunque este índice es un indicador esencial, es importante destacar que no podemos considerar que existe sincronización basándonos únicamente en este indicador, ya que refleja la diferencia entre las amplitudes de las potencias de salida de los láseres. Las regiones oscuras indican zonas donde las potencias de salida de los láseres se superponen, mientras que las regiones cla-

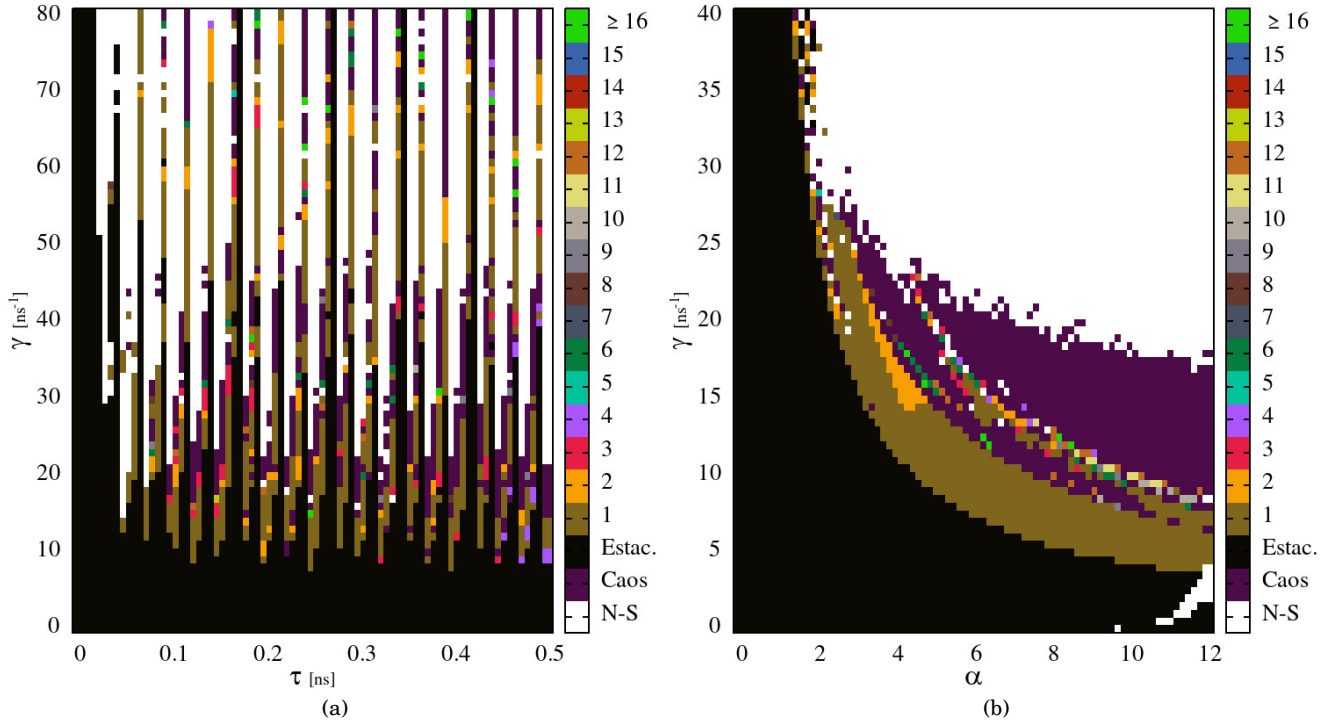


Fig. 4.— Caracterización de la sincronización mediante periodicidades de dos láseres acoplados unidireccionalmente. Donde: “N-S”, “Caos” y “Estac” indican asincronía (no sincronización), sincronización caótica y situación estacionaria respectivamente; en tanto que órdenes de sincronización asociados a una determinada periodicidad se expresan por los colores asociados a números correspondientes a los máximos o mínimos (picos o valles) de las oscilaciones periódicas. (a)  $\gamma$  vs.  $\tau$ , (b)  $\gamma$  vs.  $\alpha$ .

ras indican zonas donde existe una diferencia en las amplitudes de las potencias de salida de los láseres.

En la Fig. 3(d), se muestra el error del índice de sincronización para el parámetro de control asociado a la retroalimentación vs. intensificación del ancho de línea, en este caso el indicador sí caracteriza la sincronización puesto que las regiones oscuras indican que las potencias de salida se sincronizan mientras que las zonas claras indican que no lo hacen.

En la Fig. 4(a) se muestran regiones de sincronización que caracterizan el comportamiento que presentan las series temporales, para  $\gamma$  vs.  $\tau$ . Se pueden identificar dos regiones principales. Una de ellas corresponde a la situación de comportamiento estacionario, mientras que la otra indica no sincronización. En el límite entre estas dos regiones, destacan las zonas de sincronización de periodicidad 1. Además, también se observan regiones de sincronización caótica y de periodicidades mayores a 1.

En la Fig. 4(b) se muestran regiones de sincronización y su comportamiento para  $\gamma$  vs.  $\alpha$ . Se distinguen tres regiones principales: sincronización caótica, sincronización de periodicidad 1 y no sincronización. En una parte del límite entre las regiones de sincronización caótica y sincronización de periodicidad 1, se aprecia una zona de sincronización de periodicidad 2. Además, en la vecindad de la región de sincronización caótica se observa el surgimiento de regiones de sincronización de periodicidad mayor o igual a 1.

Es de destacar que tanto el índice de sincronización y el error del índice de sincronización, dependen del transitorio, dado que estos indicadores toman todos los datos de la serie temporal, y el hecho de

considerar un transitorio pequeño, puede hacer que los índices se vean afectados debido a que en ocasiones no se alcanza el comportamiento estable.

#### 4. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Se estudió el comportamiento dinámico y la sincronización de dos láseres acoplados en una configuración transmisor-receptor, variando los términos asociados al ruido, al retardo y a los parámetros de control de retroalimentación e intensificación de ancho de línea. El hecho de incluir ruido y retardo, hacen que este trabajo numérico aborde situaciones más próximas a las experimentales.

Se constató la importancia de los diagramas de bifurcación, pero se evidenció que en el modelo analizado, surgen comportamientos que sugieren periodicidad en los diagramas de bifurcación, cuando en realidad se trata de comportamientos estacionarios de distinta magnitud. Es por este motivo que se decidió llevar a cabo un estudio basado en el cálculo de periodicidades del sistema variando simultáneamente dos parámetros de control, lo cual nos permite caracterizar con mayor detalle la dinámica del sistema gracias a la determinación del número de picos y/o valles en las oscilaciones periódicas, lo que da cuenta de requerimientos computacionales mayores respecto a los diagramas de bifurcación convencionales.

Con base en los índices propuestos para caracterizar la sincronización, se encontraron regiones de sincronización, cuyos detalles se desconocían a priori. Sin embargo, la determinación conjunta de las periodicidades y de los indicadores de sincronización per-

mite la identificación de regiones síncronas, asíncronas y de estacionariedad, pudiendo las primeras presentar regímenes periódicos o caóticos. El requerimiento computacional para caracterizar la dinámica de las zonas de sincronización es ligeramente superior al correspondiente método tradicional para la determinación de sincronización.

Si bien en este trabajo nos centramos en el estudio de la variación temporal del campo eléctrico, queda abierta la posibilidad de analizar otras variables dinámicas del sistema. Además, es posible también considerar la variación de los otros parámetros de control y así tener una comprensión más profunda de la dinámica del sistema.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen los comentarios y observaciones formuladas por el árbitro que de manera anónima ayudó a mejorar el artículo y a clarificar aspectos esenciales del mismo. DPA expresa su agradecimiento al Lic. Ricardo Forno Gisbert por sus valiosas críticas y observaciones en el campo de la física de los láseres a lo largo del desarrollo de este trabajo. GMRA agradece el financiamiento del programa de investigación e innovación Horizonte 2020 de la Unión Europea en virtud del acuerdo de subvención Marie Skłodowska-Curie N° 101034383.

## Conflicto de intereses

Los autores declaran que no existe conflicto de intereses respecto a la publicación de este documento.

## REFERENCIAS

- Abarbanel, H., Kennel, M., Illing, L., Tang, S., Chen, H., & Liu, J. 2001, *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 37, 1301
- Alonso Fernández, B. et al. 2010, *El láser, la luz de nuestro tiempo* (Isabel Arias Tobalina)
- Annovazzi-Lodi, V., Donati, S., & Scirè, A. 1996, *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 32, 953
- Arakawa, G. P. & Dutta, N. K. 1993, *Semiconductor Lasers* (New York: Van Nostrand Reinhold)
- Barbu, T. 2013, *Abstract and Applied Analysis*, 2013, 8 pages
- Blackbeard, N., Erzgräber, H., & Wiczorek, S. 2011, *SIAM J. Applied Dynamical Systems*, 10, 469
- Boccaletti, S. et al. 2002, *Physics Reports*, 366, 5
- Buck, J. B. 1935, *Science*, 81
- Bustos-Espinoza, R. O. & Ramírez-Ávila, G. M. 2016, *The European Physical Journal Special Topics*, 225, 2697
- Conradt, L. & List, C. 2008, *Philosophical transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological sciences*, 364, 719
- Ermentrout, B. 2002, *Simulating, Analyzing, and Animating Dynamical Systems: A Guide to XPPAUT for Researchers and Students* (Philadelphia: SIAM)
- Glendinning, P. 1994, *Stability, Instability and Chaos: An Introduction to the Theory of Nonlinear Differential Equations* (Cambridge University Press), accessed 29 September 2023
- Heiligenthal, S., Jüngling, T., D'Huys, O., Arroyo-Almanza, D. A., Soriano, M. C., Fischer, I., Kanter, I., & Kinzel, W. 2013, *Phys. Rev. E*, 88, 012902
- Honeycutt, R. L. 1992, *Phys. Rev. A*, 45, 600
- Kaplan, D. & Glass, L. 1995, *Understanding Nonlinear Dynamics* (New York: Springer-Verlag)
- Mirasso, C. R. 2000, *AIP Conference Proceedings*, 548, 112
- Nicolis, G. 1995, *Introduction to Nonlinear Science* (Cambridge University Press)
- Pecora, L. & Carroll, T. 1990, *Physical Review Letters*, 64, 821
- Pikovsky, A., Rosenblum, M., & Kurths, J. 2001, *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge Nonlinear Science Series (Cambridge University Press)
- Poincaré, H. 2017, *The Three-Body Problem and the Equations of Dynamics: Poincaré's Foundational Work on Dynamical Systems Theory*, 1st edn., *Astrophysics and Space Science Library* (Springer Cham), XXII, 248
- Ramírez-Ávila, G. M. 2007, *Revista Boliviana de Educación Superior en Ciencias*, 7, 25
- Ramírez-Ávila, G. M. & Gallas, J. 2011, *Revista Boliviana de Física*, 19, 1
- Ramírez-Ávila, G. M., Kurths, J., Depickère, S., & Deneubourg, J.-L. Modeling Fireflies Synchronization (Springer Cham), 131–156
- Smith, H. 2010, *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*, Vol. 57
- Song, L. & Yang, J. 2009, in *2009 4th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications*, 919 – 924
- Strogatz, S. H. 2018, *Nonlinear dynamics and chaos with student solutions manual: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering* (CRC press)
- Subieta-Frias, V. & Ramírez-Ávila, G. M. 2017, *Revista Boliviana de Física*, 31, 3
- Volos, C., Kyprianidis, I., & Stouboulos, I. 2012, *WSEAS Transactions on Systems*, 11, 681