

ESTUDIO EXPERIMENTAL DEL ARO ROTANTE: NUEVAS EVIDENCIAS DE LA INDEPENDENCIA DE LA MASA Y DE LA EQUIPROBABILIDAD DEL PUNTO DE EQUILIBRIO
EXPERIMENTAL STUDY OF A ROTATING HOOP: NEW EVIDENCE OF MASS INDEPENDENCE AND EQUI-PROBABILITY OF THE EQUILIBRIUM POINT

LUCAS BLITZ LOZADA GOBILARD [†] & GONZALO MARCELO RAMÍREZ-ÁVILA [‡]

[†]Instituto de Investigaciones Físicas, Carrera de Física
Universidad Mayor de San Andrés
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8639
La Paz- Bolivia

(Recibido 12 de noviembre de 2019; aceptado 17 de diciembre de 2019)

RESUMEN

El presente trabajo expone los resultados y análisis de un montaje experimental ideado por los autores con el propósito de crear un sistema mecánico no lineal que permita obtener datos relevantes referidos al fenómeno de bifurcación. Los resultados del experimento permitieron generar diagramas de bifurcación del parámetro de control, ratificándose contenidos teóricos significativos. La base empírica permitió corroborar la independencia de la masa en las ecuaciones de movimiento y verificar el carácter equiprobable del sistema, en lo referido a la estabilidad en los nuevos puntos de equilibrio, refutando aseveraciones repetidas por manuales de texto de dinámica no lineal para el caso de una esfera. Los datos fueron sistematizados a partir de los siguientes experimentos: (i) una esfera en aire y (ii) sumergida en otros tres fluidos diferentes, (iii) varias esferas en aire y (iv) sumergidas en los mismos fluidos, (v) además de tres fluidos aislados: agua teñida, líquido de transmisión y aceite de motor.

Código(s) PACS: 05.45.-a — 02.30.Oz — 45.80.+r

*Descriptor*es: Dinámica no lineal y caos — Teoría de bifurcaciones — Control de sistemas mecánicos.

ABSTRACT

This study presents the results and analysis of an experimental assembly devised by the authors to create a nonlinear mechanical system that obtains relevant data associated with the bifurcation phenomenon. The results of the experiment led to the generation of bifurcation diagrams related to the control parameter, and supports significant existing theoretical evidence. This empirical base permits us to corroborate the independence of the mass in the motion equations and verify the equi-probable nature of the system, in terms of stability at the new equilibrium points. These results refute repeated assertions by nonlinear dynamics textbooks for the case of one sphere. The data were obtained from the following experiments: (i) a sphere in air (ii) a sphere submerged in three other different fluids separately, (iii) several spheres in air and (iv) several spheres submerged in the same three different fluids, (v) in addition to the three isolated fluids: several spheres were submerged in stained water, transmission fluid and engine oil respectively.

Subject headings: Nonlinear dynamics and chaos — Bifurcation theory — Control of mechanical systems.

1. INTRODUCCIÓN

La dinámica no lineal es una disciplina que ha despertado interés en la ciencia moderna. Con el desarrollo de la tecnología y en particular de los ordenadores, actualmente se estudian sistemas cuya descripción era muy dificultosa hace poco más de medio siglo.

Según la teoría, explicada por Shivamoggi (1997), es posible que de manera espontánea, en los sistemas no lineales se rompan las restricciones de simetría dadas por el ambiente para ciertos rangos de valor de los parámetros de control. Dicha ruptura se evidencia en la bifurcación del estado del sistema no lineal dependiente de cierto parámetro. En cuanto el parámetro de control llega al valor crítico respectivo, el estado del sistema se bifurca generando un cambio cualitativo en el comportamiento del sistema.

[†]llozada@fiumsa.edu.bo

[‡]mravila@fiumsa.edu.bo

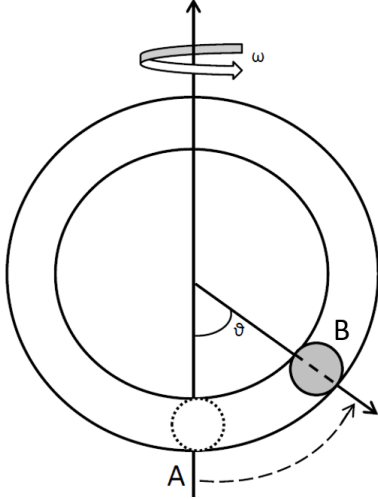


FIG. 1.— Sistema estudiado. La situación trivial de equilibrio corresponde a la esfera en la posición A y desplazamiento angular nulo $\vartheta_0 = 0$. El nuevo punto de equilibrio se da alrededor de la posición B y con desplazamiento angular distinto de cero. La coordenada generalizada es ϑ .

Cuando existen múltiples soluciones al sistema, desde el punto de vista experimental se deben considerar solamente aquellas que son estables. La teoría de bifurcaciones, como explica Strogatz (1994), establece tipos y formas de estabilidad que se alcanza en función de la variación del parámetro de control y según las condiciones de estabilidad.

Los sistemas no lineales, matemática y físicamente más interesantes, actualmente son los sistemas caóticos por su riqueza dinámica. Sin embargo, dadas las exigencias y limitaciones, el objeto de estudio de la presente investigación es un sistema no caótico, caracterizando experimentalmente al aro rotante como un sistema dinámico no lineal; tal caracterización se ha realizado gracias a las facilidades para efectuar el montaje de los experimentos de este tipo.

1.1. Fundamento teórico

El sistema estudiado es una esfera de masa m contenida en un anillo rígido de radio a en el campo gravitatorio. La esfera está dispuesta inicialmente en un ángulo ϑ_0 en el extremo inferior del diámetro vertical y se considera que tiene libertad de movimiento sin fricción a través del anillo. La Fig. 1 muestra el movimiento oscilatorio de la esfera alrededor del punto de equilibrio en las siguientes situaciones: (A) cuando el aro está inmóvil y (B) cuando el aro está rotando.

Si el aro rota alrededor de su diámetro vertical con velocidad angular constante ω , se verifica experimentalmente que la masa m mantiene una oscilación alrededor de la posición de equilibrio A.

Más allá del valor crítico ω_c , se observa que la situación cambia y la masa oscila alrededor de un nuevo punto de equilibrio B, correspondiente a un valor no nulo del ángulo ϑ (ver Fig. 1). De hecho, existen dos puntos de equilibrio ubicados simétricamente respecto al diámetro vertical. En

principio, no existe factor de preferencia alguno para la nueva situación de equilibrio: la posición final está dada por las condiciones iniciales (generalmente aleatorias) y por la velocidad de la masa. Esta explicación del sistema se basa en la dada por Nicolis (1995).

Para estudiar la dinámica del sistema, es conveniente simplificar el problema, con coordenadas polares y despreciando la fricción de la esfera con el anillo. De este modo, el lagrangiano del sistema es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ma^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2a^2\sin^2\vartheta + mga\cos\vartheta, \quad (1)$$

lo que se puede escribir como:

$$\frac{\mathcal{L}}{ma^2} = \frac{1}{2}\omega^2\sin^2\vartheta + \frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 + \frac{g}{a}\cos\vartheta. \quad (2)$$

Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange:

$$L = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vartheta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vartheta}} = 0,$$

se obtiene que la ecuación diferencial que describe el movimiento del sistema está dada por:

$$\ddot{\vartheta} - \omega^2\sin\vartheta\cos\vartheta + \frac{g}{a}\sin\vartheta = 0. \quad (3)$$

En el equilibrio, ϑ es una constante, llámese ϑ_0 . Entonces, $\dot{\vartheta} = 0$, $\ddot{\vartheta} = 0$, etc, como lo explica Masoller (2011). Así, la condición de equilibrio es:

$$\left(-\omega^2\cos\vartheta_0 + \frac{g}{a}\right)\sin\vartheta_0 = 0. \quad (4)$$

Las soluciones son $\sin\vartheta_0 = 0$ o bien $\cos\vartheta_0 = \frac{g}{a\omega^2}$.

La primera posibilidad permite dos puntos de equilibrio: $\vartheta_0 = 0$, correspondiente al fondo del aro, y $\vartheta = \pi$; el tope del aro. La justificación de la imposibilidad física del segundo punto se halla en Marion (1998). La ubicación de estos puntos es independiente de ω . La segunda posibilidad permite un punto de equilibrio con ϑ menor a $\pi/2$, dado que $g/a\omega^2 > 0$. Como $\cos\vartheta_0 \leq 1$, este punto de equilibrio existe solo a velocidades de giro correspondientes a $\omega \geq \sqrt{g/a}$.

La esfera desplazada encontrará un nuevo punto de equilibrio tal que $\ddot{\vartheta} = 0$. Esta consideración lleva a una expresión del valor crítico o umbral de la velocidad angular:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{a}}. \quad (5)$$

De esta forma, la velocidad angular de giro del aro ω constituye el parámetro de control que va a determinar las regiones de estabilidad del sistema.

Es conveniente expresar la información mediante un diagrama de bifurcación (ver Fig. 2), en el cual la posición de equilibrio ϑ , que caracteriza el estado del sistema, se grafica en función de la velocidad angular ω , que representa la restricción del sistema. Por debajo del valor crítico ω_c solo es posible una posición,

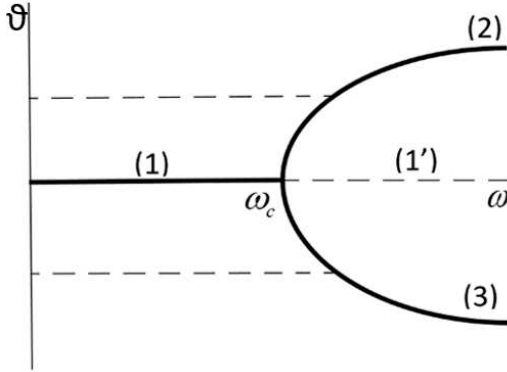


FIG. 2.— Bifurcación tipo *Supercritical Pitchfork* (tenedor supercrítico). La Rama 1 corresponde a la situación estable $\omega < \omega_c$, mientras que la rama discontinua 1' denota la situación de inestabilidad. Las ramas 2 y 3 corresponden a la estabilidad, cuando $\omega > \omega_c$, siendo en principio equiprobables.

correspondiente a $\vartheta = 0$ (Rama 1 en la Fig. 2). Nicolis (1995) dicta que por encima de ω_c este estado no puede mantenerse. Esto se expresa en la Fig. 2 con una línea segmentada correspondiente a la Rama 1'. Para cada $\omega > \omega_c$ dos nuevas posiciones de equilibrio se hallan disponibles. Junto a los valores correspondientes de ángulo, se obtienen dos ramas (2 y 3) que emergen de 1 en $\omega = \omega_c$.

En este caso particular, la bifurcación recibe el nombre de *Pitchfork* o “tenedor” por su forma.

Es significativo que el mismo sistema físico-bastante simple- puede presentar diferentes tipos de comportamiento a medida que cambia el valor de un parámetro de control establecido.

Dado que el aro rotante es un sistema continuo con un solo grado de libertad, no puede dar lugar a comportamiento caótico. No obstante, da lugar al fenómeno de inestabilidad y bifurcación. Para más detalle de la imposibilidad del caos en este sistema, ver Nicolis (1995).

El diagrama de la Fig. 2 describe los puntos en los cuales el sistema se encuentra en un estado de equilibrio. Para valores de ω más bajos que ω_c , existen dos puntos de equilibrio: $\vartheta_0 = 0$ y $\vartheta_0 = \pi$. Para valores de ω mayores a ω_c , existen tres puntos de equilibrio:

$$\vartheta_0 = 0, \quad \vartheta_1 = \pi \quad \text{y} \quad \vartheta_2 = \cos^{-1}(\omega_c/\omega)^2 .$$

Dada la forma de los posibles puntos de equilibrio, también resulta ilustrativo representar el diagrama de bifurcación como la razón de las velocidades angulares ω/ω_c en función del ángulo desplazado ϑ , como hace Moisy (2003).

De este modo, en términos de la razón de rotación crítica, la ecuación de movimiento es:

$$\ddot{\vartheta} - \omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + \omega_c^2 \sin \vartheta = 0 . \quad (6)$$

El comportamiento dinámico de este sistema, de acuerdo con la teoría del análisis de bifurcación (*Supercritical Pitchfork*) presenta la simetría $x \rightarrow -x$ y tiene la forma normal:

$$\dot{x} = \mu x - x^3 . \quad (7)$$

Como se explica en Strogatz (1994), es posible hallar uno o tres puntos fijos, dependiendo del signo del parámetro μ : el punto fijo $x^* = 0$ existe para todos los valores de μ , mientras que los dos puntos fijos simétricos $\pm\sqrt{\mu}$ existen solo para $\mu > 0$. Si el sistema sobrepasa el valor crítico cuando $\mu < 0$, se da una de las dos posibles ramas estables de la bifurcación. En tal situación, debido a que las ecuaciones dejan de ser invariantes frente a la transformación $x \rightarrow -x$, se rompe la simetría del sistema.

Este sistema es un ejemplo típico de mecánica clásica, como lo muestran Goldstein, Poole & Safko (2001) y en el que se resaltan los aspectos no lineales en Nicolis (1995). De hecho, algunos trabajos que han tratado este sistema realizaron diferentes modificaciones: tomando en cuenta efectos que son normalmente despreciados, como lo hacen Raviola *et al* (2017); aumentando el número de grados de libertad, como exponen Burov & Yakushev (2014); variando el eje de rotación, planteado por Johnson & Rabchuk (2009); o involucrando aspectos mecánicos adicionales, sugerido por Wellstead (1983). Sin embargo, es frecuente que el análisis se limite a la teoría o al cálculo numérico. La riqueza dinámica de este sistema amerita un montaje experimental que permita comprobar las predicciones de la teoría (obtener explícitamente diagramas de bifurcación) y eventualmente hallar nuevos fenómenos físicos que puedan resultar interesantes.

Es ilustrativo hasta qué punto es válida experimentalmente la independencia de la masa en la Ec. (3); además, es recomendable estudiar los límites del carácter equiprobable del sistema, referido a los estados de estabilidad posibles.

En este trabajo se muestra los resultados de un montaje de sencilla construcción, que permitió verificar experimentalmente la bifurcación predicha por la teoría de este sistema no lineal. Particularmente, se estudió la situación más sencilla de una esfera en un anillo (Fig. 1) y se extendió el análisis a varias esferas. Posteriormente, se trabajó con diferentes fluidos (siguiendo los lineamientos de la independencia de la masa) y finalmente con esferas sumergidas en los fluidos.

2. METODOLOGÍA

El montaje experimental consiste en una pequeña manguera de plástico flexible de (10.0 ± 0.1) mm de diámetro externo y (1.0 ± 0.1) mm de grosor, flexionada en forma semicircular y unida a un transportador circular de 360° y (12.0 ± 0.1) cm de diámetro, para que adopte su curvatura. La masa utilizada consiste en un perdigón esférico de estaño de (6.0 ± 0.1) mm de diámetro y de (1.02 ± 0.01) g. La Fig. 3 muestra una fotografía del montaje.

Se realizaron pruebas de velocidad de la esfera en la manguera para comprobar que el rozamiento es despreciable. Se ensambló el sistema a un motor eléctrico de licuadora de 10 velocidades (BLSTEP-

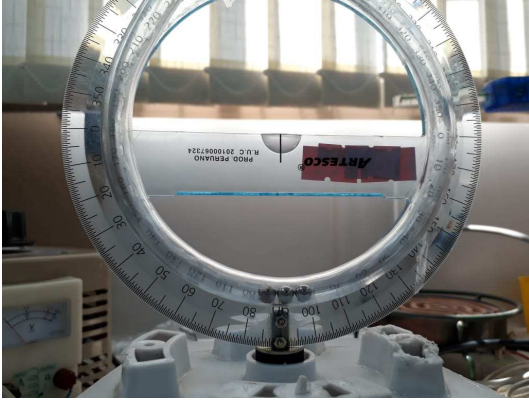


FIG. 3.— (Color online) Fotografía del montaje experimental, correspondiente al caso de tres esferas.

7808W) adecuando el eje de conexión de la carcasa plástica para que gire alrededor del eje deseado, como muestra la Fig. 1. El motor fue modificado, añadiéndosele una conexión con regulador de voltaje *householdsingle* monofásico variac de 1000 W y rango de voltaje de cero a 250 V, conectado a un potenciómetro de dos terminales (B10K OHM 3). La modificación dio lugar a que el motor funcionara con voltaje continuo sin exceder el límite establecido, regulado por el potenciómetro. Sobre el dispositivo montado hubo control suficiente de la velocidad de giro del motor (y por lo tanto del sistema), reduciéndola al rango deseado.

Se alineó el sistema de tal manera que, al encontrarse en equilibrio, la esfera permanezca en la posición de ángulo inicial nulo ϑ_0 . Adicionalmente, al extremo opuesto de la posición de equilibrio inicial, se instaló un pequeño imán de disco de neodimio de dimensiones $(10.0 \pm 0.1 \times 1.0 \pm 0.1)$ mm, unido al transportador para que giren en conjunto. Alineado al eje magnético del imán, se instaló un detector de campo magnético de un eje (Línea PasPort Pasco PS-2162) conectado a un registrador de datos gráficos universal (Pasco PS-2002) que posibilitó, por una parte, medir la intensidad del campo magnético, y por otra, almacenar y graficar los datos obtenidos en tiempo real.

Los datos graficados permitieron constatar dos picos de campo magnético por cada giro del sistema. Los picos corresponden a la lectura del detector cada vez que el imán pase por su eje. Este sencillo, eficiente y preciso montaje, permitió conocer la frecuencia de giro, siendo posible calcular la velocidad angular del sistema.

En congruencia con la teoría, el experimento comprobó que suministrándose un voltaje fijo, el motor giraba a velocidad constante. Se ubicó el detector de campo magnético en cuatro diferentes posiciones, todas radiales respecto del eje de giro. Se tomaron muestras de medidas para tres velocidades en cada caso. La obtención de las medidas de la intensidad de campo magnético fue comparada con la distribución ideal de valores según el comportamiento de tipo gaussiano en el tiempo (así lo señala el manual de uso PASCO (2000)), correspondiendo el pico

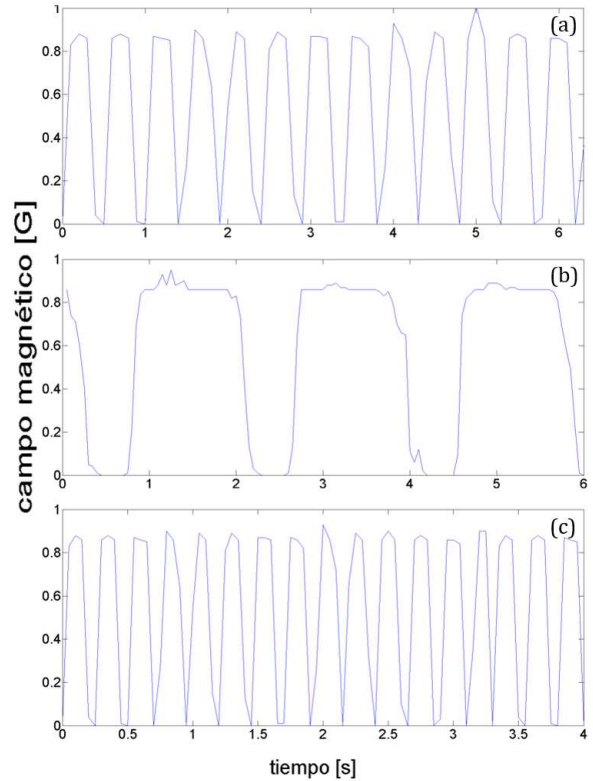


FIG. 4.— Datos obtenidos de intensidad de campo magnético en función del tiempo para la determinación de las velocidades angulares de rotación del sistema, obteniéndose: (a) 66.67 rpm, (b) 16.67 rpm y (c) 149.25 rpm. Estos resultados fueron obtenidos utilizando la consideración estadística explicada más arriba.

al punto en que el imán pasa por el detector. La Fig. 4 es un ejemplo de resultados obtenidos desde una de las posiciones del detector para la determinación de tres velocidades angulares diferentes. Para el mencionado cálculo, se considera que en la serie de tiempo del campo magnético el intervalo de tiempo transcurrido en dos oscilaciones corresponde a una revolución del aro. Nótese que las oscilaciones no son perfectamente regulares, por lo que se hace un análisis estadístico del tiempo transcurrido correspondiente a cada revolución y con ello se obtiene un valor medio de la velocidad angular de rotación del aro.

Las medidas previas mostraron que para calibrar el experimento se requería un tiempo estimado de 0.5 s, como tiempo de estabilización del motor para todas las velocidades, por lo que no se consideraron las medidas registradas de ese lapso. Pasado el tiempo de estabilización, se mantuvieron las medidas de intensidad de campo magnético según un comportamiento uniforme en las tres velocidades del motor indicadas en la Fig. 4. La diferencia relativa de campo magnético en los picos no fue mayor al 9% y la diferencia en anchura a media altura fue menor al 3% por lo que se consideró la velocidad angular suficientemente constante para el voltaje determinado.

Además, el ajuste de datos se realizó tomando en cuenta las medidas de ruido en la intensidad de

campo magnético, establecidas por el sensor para cada caso particular.

Con la velocidad de giro caracterizada como constante, se registraron los datos de una esfera. En primer lugar, como prueba cualitativa, se advirtió que, aumentándose la velocidad de giro hasta exceder el valor crítico, se dieron cambios en el comportamiento del sistema, con una nueva posición de equilibrio de la esfera.

La notación fijada arbitrariamente diferenció que el lado derecho de la manguera correspondía a un ángulo ϑ_+ , en tanto que el lado izquierdo se denotó como ϑ_- ¹. Para estimar el nuevo punto de equilibrio alrededor del cual la esfera oscilaría y medir el ángulo desplazado por la esfera hasta este punto, se tomaron fotografías empleando dos medios: en primer lugar, una cámara Nikon® HB-45 a 60 fps (tomas por segundo) y, en segundo lugar, una aplicación gratuita para celular con 200 fps.

Para registrar cada nueva medida se hizo lo siguiente: se cortó el suministro de energía eléctrica al motor y se prepararon las cámaras fotográficas y los dispositivos de medida para otros registros digitales. Inmediatamente, se aumentó la velocidad angular respecto a la que dio lugar a los valores anteriores, creándose un registro progresivo, gracias a la repetición del proceso descrito.

Posteriormente, al montaje de base, se adicionaron esferas y fluidos para repetir el experimento. Se añadieron una a una esferas del mismo tipo de diámetro (6.1 ± 0.1) mm y masa (0.97 ± 0.07) g hasta un máximo de 20. Para cada cantidad de esferas, se registraron veinte medidas, explicitándose las posiciones de equilibrio. Esto fue posible gracias a cinco velocidades discretas del motor, mayores al valor crítico.

Seguidamente, se hicieron experimentos reemplazando las esferas por fluidos y empleando mangueras similares para cada fluido con velocidades mayores a la crítica. Se emplearon los siguientes fluidos: en primer lugar, agua destilada teñida con sulfato cúprico², en segundo lugar, aceite de transmisión automática 1QT y, en tercer lugar, aceite de motor SAE10w30.

La última parte del experimento consistió en adquirir datos de un número variable de esferas sumergidas en los tres fluidos mencionados. Esto permitió obtener diagramas de bifurcación para el caso de una esfera y señalar las posiciones de equilibrio en el caso de varias esferas. Al final, se observó cualitativamente la configuración del sistema juntando fluidos inmiscibles en la manguera.

3. RESULTADOS

Se obtuvo, como primer resultado, la bifurcación en términos del parámetro de control, como se estableció en la teoría y que se muestra en la Fig. 5, evidenciándose los datos de una esfera en el aire. La presente investigación ha contrastado contenidos

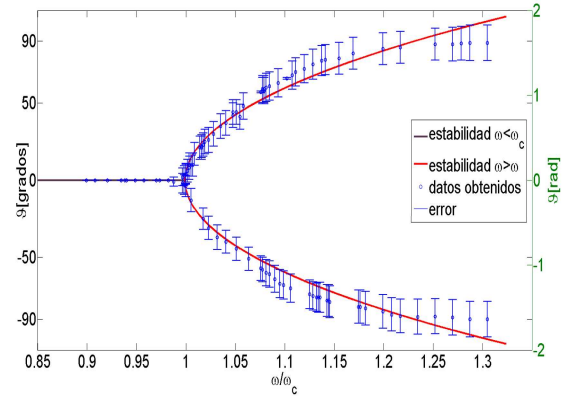


FIG. 5.— (Color online) Bifurcación obtenida experimentalmente para una esfera sumergida en aire. Las líneas continuas corresponden a la teoría dada por el análisis de estabilidad de la Ec. (4).

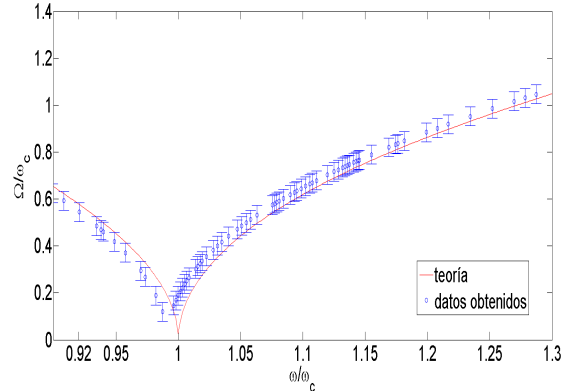


FIG. 6.— (Color online) Frecuencia natural característica del sistema estudiado. La línea continua roja corresponde al cálculo numérico efectuado con el valor teórico de la velocidad angular crítica y los puntos azules a los datos obtenidos experimentalmente.

de la teoría con datos experimentales, ratificando la verosimilitud de la Ec. (5). Esta predice, adecuadamente, el valor de la velocidad angular crítica en 56.71 rad/s, mientras que, ajustando la parábola formada por los datos obtenidos, el valor estimado de ω_c es de (56.2 ± 0.8) rad/s. Para fundamentar tales resultados, se sistematizaron 108 registros, de los que, en 57 casos, la esfera se encontró en un nuevo punto de equilibrio en la rama de ϑ_- ; mientras que, en los otros 51 casos se encontró en la rama de ϑ_+ .

La investigación ha confirmado que la ecuación referida a la frecuencia natural de oscilación Ω de la esfera alrededor de la nueva posición de equilibrio es válida. Dicha ecuación, establecida por Moisy (2003), se corrobora con la gráfica de la Fig. 6 y enuncia lo siguiente:

$$\Omega = (\omega_c^2 - \omega)^{1/2} .$$

Las simulaciones correspondientes a las líneas continuas de las Figs. 5 y 6 se realizaron con base en un código disponible gratuitamente en línea otorgado por Shan He (2006).

¹ Tal convención prevaleció en el registro de todos los datos.

² Para diferenciar los fluidos en las fotografías.

TABLA 1
CARACTERÍSTICAS DE LOS FLUIDOS CONSIDERADOS.
LOS DATOS DE DENSIDAD VOLUMÉTRICA Y VISCOSIDAD ESTÁN TOMADOS PARA 20°C.

Fluido	Densidad [g/cm ³]	Viscosidad [Pa·s]	Volumen tomado [ml]	Temp. medida [K]	Vel. Crítica[rad/s]
Agua destilada	1.07	1×10^{-3}	10 ± 1	290.65	56.5
Líquido de transmisión	0.8978	0.04	10 ± 1	290.15	63.4
Aceite para motor	0.859	0.03	10 ± 1	287.15	62.1

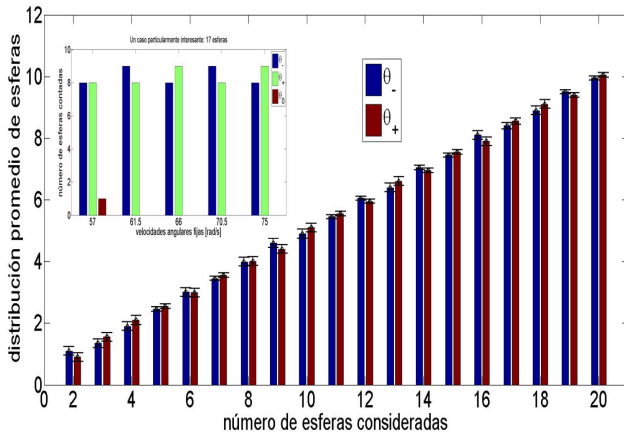


FIG. 7.— (Color online) Distribución promedio de esferas en función del número de esferas consideradas. Como subgráfico, se muestra un ejemplo atípico de una toma de datos con velocidades angulares fijas para 17 esferas.

Se efectuaron pruebas y se tomaron medidas aumentando el número de esferas progresivamente hasta llegar a 20. Para cada caso, hubo veinte repeticiones con cinco velocidades diferentes mayores a la crítica, según las características del motor y el rango de interés. Se establecieron las posiciones de equilibrio para cada esfera con valores positivos o negativos según el desplazamiento angular (ϑ_+ y ϑ_-). La Fig. 7 muestra los histogramas de los nuevos puntos de equilibrio para 20 casos con diferente número de esferas. Los casos 3, 17 y 19 son atípicos, porque en una de las veinte mediciones que hubo para cada uno, se encontraron resultados contrarios a la predicción teórica (con velocidades diferentes). En las mediciones mencionadas (60 en total) una esfera no cambió su posición inicial. Del caso número 17, la Fig. 7 muestra la posición atípica.

La Fig. 8 es una fotografía de la situación atípica con tres esferas. El estudio de las grabaciones respectivas muestra que la esfera que se mantenía en el punto inicial de equilibrio, oscilaba alrededor del mismo y, posteriormente, subía por uno de los brazos de la manguera, siguiendo una trayectoria de la bifurcación. Se trata de un estado de “multiestabilidad”³, porque la permanencia alrededor del punto inicial se dio por 1.4 segundos, en tanto la teoría establece que no debería permanecer oscilando alrede-

³ La denominación “multiestabilidad” se la utiliza para enfatizar que ha sido posible observar una situación que es típicamente de inestabilidad.

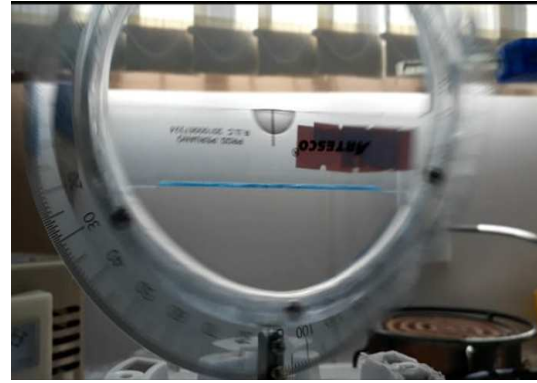


FIG. 8.— (Color online) Situación atípica de “multiestabilidad” con tres esferas y velocidad angular 58.3 rad/s.

dor del mismo.

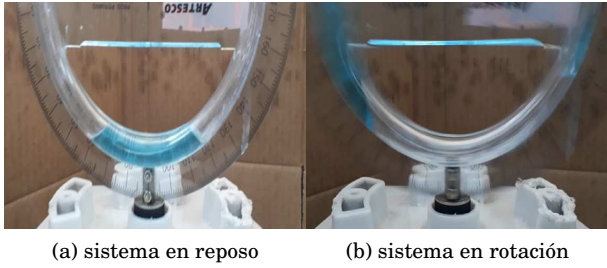
Al realizar el experimento con los tres fluidos indicados en la metodología, se constató la independencia de la masa en la ecuación de movimiento. Hubo 45 mediciones en total, 15 para cada fluido; de modo que, comparando los resultados, se tiene lo siguiente:

- En el caso del agua destilada la distribución de masa no fue simétrica, advirtiéndose en las 15 mediciones una distribución aleatoria, positiva o negativa, por cualquiera de las ramas del sistema. En todos los casos la aleatoriedad mostró una proporción aproximada de 1/3 a la derecha o a la izquierda y de 2/3 a la izquierda o a la derecha.
- En el caso del líquido de transmisión y del aceite para motor, la distribución del fluido fue, en las 30 mediciones, relativamente similar en ambas ramas. Aproximadamente, la mitad del fluido siguió la rama de la derecha y la otra mitad la de la izquierda.

Las propiedades de los fluidos y las velocidades críticas calculadas en cada caso se encuentran en la Tabla 1. Para los experimentos con los tres tipos de fluidos, se estableció la velocidad crítica respecto del momento en que se separan, como la media aritmética de 15 mediciones en cada caso.

La Fig. 9 muestra el comportamiento del agua teñida como caso diferente al comportamiento de los aceites, para los que la división en ambos brazos era altamente simétrica.

Se ha tomado el aire como otro caso del experimento (designado como el primero), diferente a las



(a) sistema en reposo (b) sistema en rotación

FIG. 9.— (Color online) Fotografías de disolución de sulfato cúprico en agua. En la manguera se advierte: (a) el agua en sistema inmóvil; (b) el agua en el sistema girando a velocidad angular mayor a la crítica. Nótese en (b) la distribución asimétrica del agua en ambos brazos de la manguera.

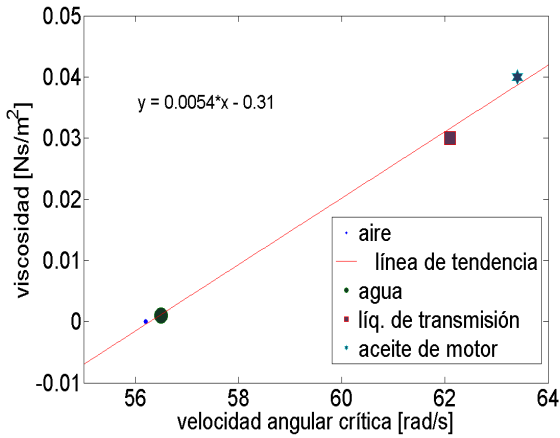


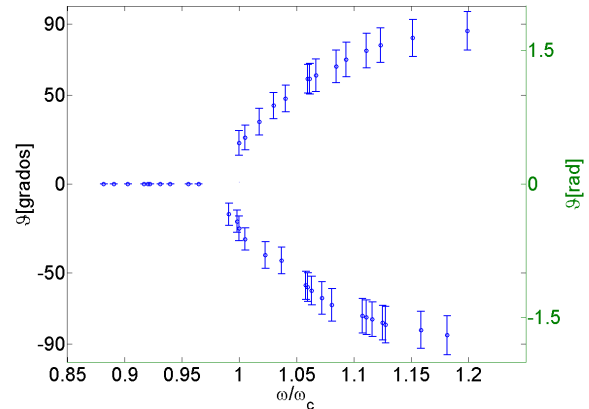
FIG. 10.— (Color online) Velocidad angular crítica estimada en función de la viscosidad de cada fluido. La línea de tendencia establece un coeficiente de correlación de Pearson de $R = 0.9963$.

esferas y a los fluidos, habiéndose advertido en el caso de los fluidos aislados un ligero desplazamiento de la velocidad angular crítica a ser traspasada para observar un cambio cualitativo en el sistema. La Fig. 10 muestra la correlación entre la velocidad angular crítica estimada y la viscosidad de los fluidos estudiados.

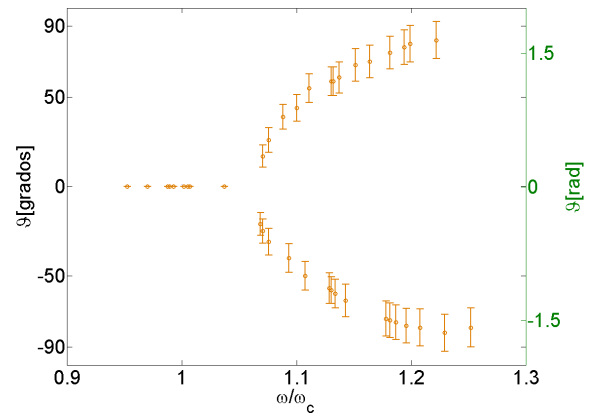
La continuación del experimento se dio sumergiendo una esfera en los tres fluidos. Esto permitió observar los nuevos puntos de equilibrio y elaborar diagramas de bifurcación, de manera análoga al caso de la esfera en aire, mostrado en la Fig. 5.

La Fig. 11 muestra las bifurcaciones obtenidas a partir de las mediciones de una esfera sumergida en los tres fluidos. Al rotar el sistema, la esfera y el fluido se movieron y ascendieron por una rama, de manera tal que la posición de la esfera en el fluido no fue alterada por la velocidad angular ni por la división en cualquiera de las ramas.

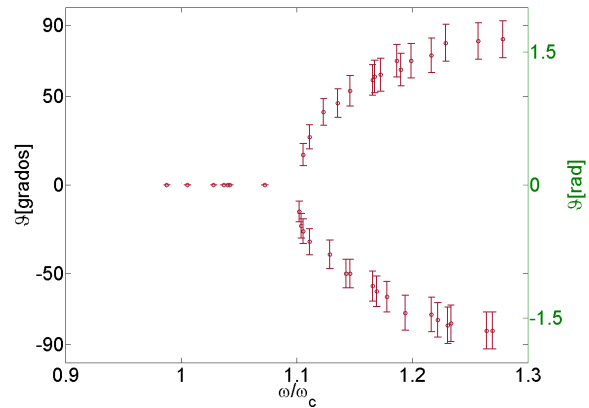
Como en el caso anterior, se aumentó progresivamente el número de esferas en el fluido para estudiar la distribución en ambas ramas de la manguera con el sistema en rotación. La Fig. 9 evidencia la ruptura asimétrica del agua. Los histogramas de la Fig. 12(a) -que muestran un ejemplo de un conjunto de datos- dan lugar a establecer los siguientes análisis:



(a) agua destilada



(b) aceite de motor



(c) líquido de transmisión

FIG. 11.— (Color online) Bifurcaciones de una esfera sumergida en los fluidos considerados. Elaboración a partir de datos experimentales.

- Los experimentos con pocas esferas evidencian la ruptura asimétrica del agua, de manera que existiría preferencia por la rama en la cual se halla mayor cantidad de agua.
- El incremento de esferas con mayor cantidad de agua que las cubra, dio lugar a la equiprobabilidad respecto de cualquier preferencia por

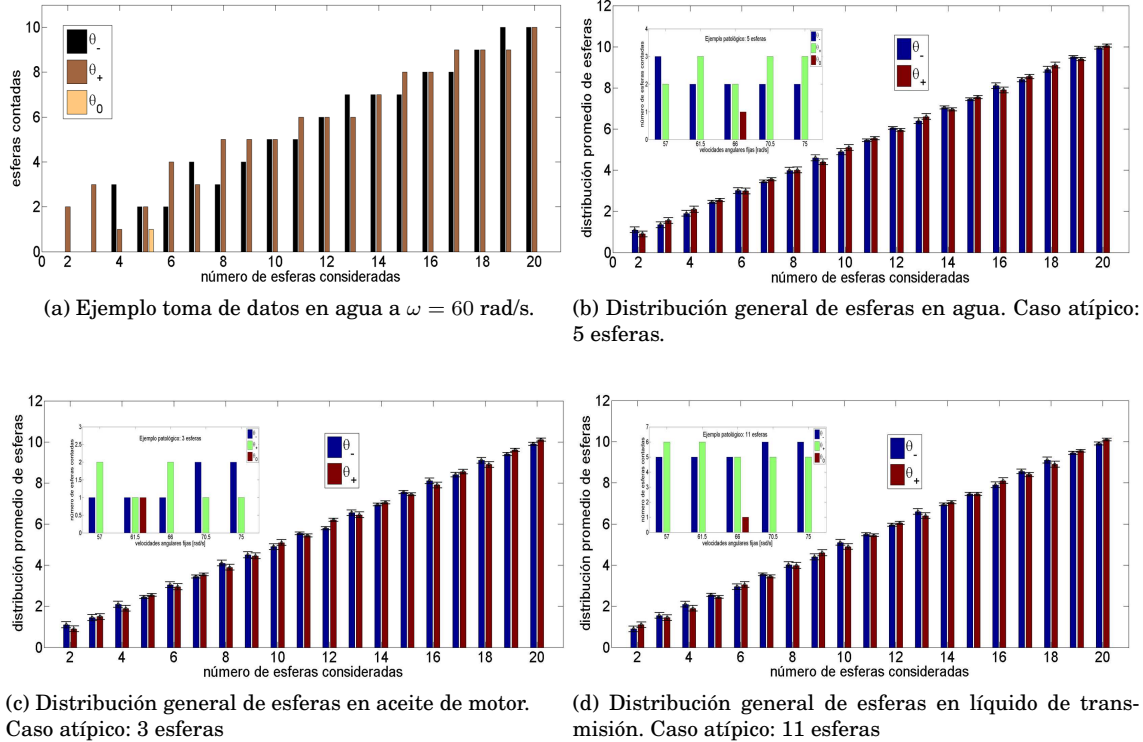


FIG. 12.— (Color online) Histogramas de distribución general de esferas. (a) Ejemplo de toma de datos de la distribución de esferas sumergidas en agua, advirtiéndose que si son pocas esferas hay predominancia de la ruptura asimétrica. Los gráficos (b), (c) y (d) muestran la distribución general de esferas en los tres fluidos considerados, incluyéndose en los subgráficos los casos atípicos de “multiestabilidad”. Un par de videos de las medidas se hallan disponibles en YouTube (2019).

alguna rama en el momento de separación del fluido.

Sin embargo, los histogramas de la Fig. 12(b) (que muestran la distribución promedio de esferas en el agua) absorben estadísticamente el ejemplo de la Fig. 12(a), corroborando que el promedio de 380 medidas no muestra preferencia alguna por cierta rama del sistema. Esta hipótesis nula respecto de la presunción de que existiría necesariamente una preferencia⁴, se corrobora con el promedio de la distribución de esferas en el aire, expresada en la Fig. 7 y con los datos de las figuras 12(b), 12(c) y 12(d) referidas a los fluidos.

Por otra parte, cabe remarcar que los resultados de la presente investigación han confirmado la “multiestabilidad” para las esferas sumergidas en fluidos, corroborada también en los subgráficos de las figuras 12(b), 12(c) y 12(d).

La Fig. 13 muestra la distribución porcentual de esferas en cada rama para los fluidos considerados, incluyéndose el primer caso referido al aire.

Respecto de los resultados a partir de las observaciones cualitativas del comportamiento del sistema en rotación considerando combinaciones de fluidos inmiscibles, se tiene lo siguiente:

⁴ La hipótesis inicial de la presente investigación fue que existiría una preferencia en la distribución de pocas esferas en el sistema.

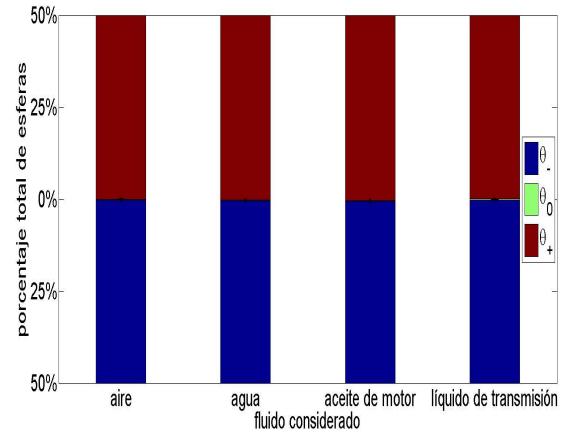


FIG. 13.— (Color online) Distribución porcentual general de esferas en las bifurcaciones de equilibrio. Nótese que las situaciones atípicas correspondientes a la posición ϑ_0 son indistinguibles, porque no representan un porcentaje mayor a 0,8%.

- Al ser sometidos a velocidades angulares mayores a la crítica, en condiciones iniciales parecidas, se registraron configuraciones del sistema muy diferentes.
- Las observaciones cualitativas denotan un espectro amplio de posibles configuraciones del sistema en comparación con la situación de un solo fluido, de una esfera o de varias (sea en aire o sea sumergidas en los tres fluidos estu-

diados); concluyéndose que existirían varias dificultades en los estudios cuantitativos respectivos.

4. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

La distribución en las nuevas posiciones de equilibrio para el caso de una esfera en aire da la noción de un comportamiento equiprobable respecto al número de veces que la esfera va a cada rama, de tal forma que cuanto mayor sea el número de experimentos realizados, menor debiera ser la diferencia entre el número de casos correspondientes a ambas ramas de la bifurcación. De esta forma, el experimento con una esfera refuta los contenidos de los manuales de texto de dinámica no lineal, en lo referido a que solo pueden ser observadas determinadas situaciones de equilibrio con una notoria tendencia hacia una rama de bifurcación (ver Nicolis o Strogatz). Gracias a un montaje sencillo calibrado y a la considerable cantidad de datos registrada, la presente investigación ha permitido elaborar diagramas de bifurcación en los que no existe preferencia evidente por seguir alguna de las ramas.

La diversidad de experimentos con fluidos diferentes ha dado como resultado la obtención de diagramas de bifurcación sin tendencia por alguna rama, puesto que la diferencia porcentual en la distribución de los nuevos estados de equilibrio del sistema no supera el 5,6%. Cualitativamente, los fluidos inmiscibles permiten inferir que la sensibilidad a condiciones iniciales es mayor a la sensibilidad que se da en las situaciones correspondientes a una o varias esferas, o a un solo fluido.

La investigación concluye un comportamiento equiprobable del sistema (cumplimiento de la hipótesis ergódica), particularmente si se trata de un montaje con una cantidad variable de esferas (independientemente del fluido en el cual se hallan sumergidas), en lo concerniente a la nueva situación de equilibrio.

Los resultados de la investigación muestran que en las configuraciones estudiadas, independientemente del modelo que se construya con una o varias es-

feras, o con diferentes fluidos aislados, la masa en las ecuaciones de movimiento puede considerarse irrelevante. Sin embargo, el hecho que la disgregación en el caso del agua sea notoriamente asimétrica -lo que no sucede con los aceites- permite inferir que se deben considerar otras variables para un modelo más completo que tome en cuenta características del fluido considerado. Los resultados de la Fig. 10 complementan experimentalmente el modelo postulado por Wellstead (1983). En tal modelo se toma el sistema del aro rotante, analizando la dinámica de la esfera en analogía con un fluido que es transportado en un vehículo giratorio.

Finalmente, la investigación establece perspectivas de trabajo futuro tomando las velocidades angulares críticas de los fluidos para determinar la viscosidad u otras propiedades de los mismos, o estimar el valor de la aceleración debida a la gravedad. También se plantea como perspectiva trabajar únicamente en el rango de velocidades angulares críticas obtenidas, esperando encontrar configuraciones interesantes, como la posibilidad de la subida por una de las ramas del conjunto fluido y esfera, sin presentarse disgregación del fluido.

Naturalmente, queda abierta la posibilidad de nuevos montajes experimentales que permitan una mejor descripción cuantitativa de configuraciones más complicadas del sistema, como ser el caso de fluidos inmiscibles, o permitan la obtención de medidas precisas de variables de interés, como la distribución en masa de los fluidos al ser sometidos a velocidades mayores a la crítica.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a Eduardo Palenque, Ph.D., por brindarnos acceso al Laboratorio de Materia Condensada y a Joaquín Roncal, por su invaluable ayuda para el montaje experimental.

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

REFERENCIAS

- Burov, A.A. & Yakushev, I.A. (2014). Bifurcations of the relative equilibria of a heavy bed on a rotating hoop with dry friction. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **78**, 460-467.
- Goldstein, H., Poole, C. & Safko, J. (2001) *Classical Mechanics*, 3^a edición. Ed. Addison-Wesley. ISBN 9780201657029.
- He, S. (2006). *Bifurcation and Chaos*. School for Computational Science, University of Birmingham. Web. 19 Septiembre 2019.
- Johnson, A.K. & Rabchuk, J. (2009). A bead on a hoop rotating about a horizontal axis: A one-dimensional ponderomotive trap. *American Journal of Physics*, **77**, 1039.
- Marion, J. (1998). *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 2^a edición. Ed. Reverté, S.A. ISBN 84-291-4094-8.
- Masoller, C. (2011). *One-dimensional nonlinear systems*. Nonlinear systems, chaos and control in Engineering, Universidad Politècnica de Catalunya. Web. 22 Septiembre 2019.
- Moisy, F. (2003). Supercritical bifurcation of a spinning hoop. *American Journal of Physics*, **71**, 999.
- Nicolis, G. (1995). *Introduction to nonlinear science*. Cambridge University Press. ISBN 0-521-46228-2.
- PASCO Magnetic Field Sensor. Instruction Sheet and First Measurements. CI-6520A. Web. 7 octubre 2019.
- Raviola, L., Véliz, M., Salomone, H., Olivieri, N. & Rodríguez, E. (2017). The bead on a rotating hoop revisited: an unexpected resonance. *European Journal of Physics*, **38**, 15005.
- Shivamoggi, B. (1997). *Nonlinear Dynamics and Chaotic Phenomena: An Introduction*. Ed. Springer Science, Dordrecht. ISBN 978-94-017-2442-5.
- Strogatz, S. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Perseus Books Publishing, L.L.C. ISBN 0-201-54344-3.
- Wellstead, P. (1983). The Ball and Hoop system. *Automatica*, **19**(4), 401-406.
- YouTube. Rotating hoop with bead, part 1 and 2. LBLG. <https://www.youtube.com/channel/UCj2qCgbtmfm4FgtBR-zg0tw>