

## ESTIMACIÓN DE REGIONES DE ESTABILIDAD EN UN MODELO DE PÉNDULO ELÁSTICO STABILITY ZONE ESTIMATION IN AN ELASTIC PENDULUM MODEL

NESTOR RODRIGO CONDORI U. & DIEGO SANJINÉS CASTEDO

Carrera de Física

Universidad Mayor de San Andrés

c. 27 Cota-Cota, Casilla de Correos 8635, La Paz, Bolivia

(Recibido 28 de julio de 2019; aceptado 15 de septiembre de 2019)

### RESUMEN

Se investiga el sistema dinámico del péndulo elástico con dos grados de libertad (radial y angular) a través del formalismo de Lagrange que conduce a un sistema de dos ecuaciones diferenciales no-lineales acopladas. Este sistema se transforma en una ecuación de Hill para la proyección horizontal de la coordenada radial, cuyo coeficiente periódico en el tiempo se modela por una función constante por tramos a fin de aplicar un criterio de estabilidad (traza de la matriz de evolución); este criterio permite obtener numéricamente un diagrama de estabilidad para los parámetros característicos del sistema sin invocar la aproximación de pequeñas oscilaciones. Así, la simulación de la solución del sistema de ecuaciones diferenciales con los parámetros elegidos según dicho diagrama de estabilidad permite verificar la precisión de su cálculo, encontrándose resultados bastante buenos. Para pequeñas oscilaciones se recupera los resultados conocidos de la ecuación de Mathieu y su correspondiente diagrama de estabilidad (diagrama de Strutt). Finalmente se discute algunas perspectivas interesantes.

Código(s) PACS: 05.45.–a – 45.20.Jj – 43.20.Ks

*Descriptores:* Dinámica no-lineal – Mecánica lagrangiana y hamiltoniana – Conservación de la energía

### ABSTRACT

We investigate the elastic pendulum dynamical system with two degrees of freedom (radial and angular) through the Lagrangian formalism which yields a system of two coupled non-linear differential equations. By projecting the radial coordinate, we obtain a Hill equation with a time-periodic coefficient modelled by a piecewise constant function. A stability diagram for the characteristic parameters of the system is then calculated by means of a criterion based on the trace of the evolution matrix without invoking the small oscillation approximation. The numerical solution of the system equations for the chosen parameters verifies the precision of the calculated stability diagram and a reasonably good agreement is found. For small oscillations we obtain the known results of the Mathieu equation and its corresponding stability diagram (Strutt diagram). We finally discuss some interesting perspectives.

*Subject headings:* Nonlinear dynamics – Lagrangian and Hamiltonian mechanics – Energy conservation

### 1. INTRODUCCIÓN

El problema del péndulo elástico ha sido ampliamente estudiado en regiones de oscilaciones pequeñas (ángulos y amplitudes despreciables) con lo cual el sistema no-lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas se hace más sencillo de tratar matemáticamente. Los primeros que aplicaron el modelo del péndulo elástico a un problema fueron Vitt & Gorelik (1933); ellos propusieron el modelo para describir la resonancia paramétrica (esto es, el fenómeno de transferencia de energía entre dos modos de oscilación) en la molécula del dióxido de carbono y hallar sus líneas espectrales. Simplificando el problema y usando la teoría de perturba-

ciones Gorelik y Vitt encontraron soluciones periódicas aproximadas. En 1976 Olsson (Olsson 1976) en estudio el problema del péndulo elástico en un sistema cartesiano; realizó un desarrollo de Taylor del lagrangiano y despreció términos superiores bajo la aproximación de oscilaciones pequeñas llegando así a la ecuación de Mathieu para la proyección de la longitud del resorte en el eje horizontal. Olsson describió también la resonancia paramétrica y concluyó que no hay soluciones analíticas expresables mediante el principio de superposición en funciones armónicas simples de los modos de oscilación. En 2002 Peter Lynch (Lynch 1996; Lynch 2002) trató el problema del péndulo elástico en dos y en tres dimensiones en coordenadas cartesianas, cilíndricas y

esféricas bajo la aproximación de pequeñas oscilaciones. Aunque Lynch deriva la ecuación de Mathieu, no se preocupa tanto por las regiones de estabilidad, si no más bien por hallar las expresiones analíticas de las soluciones en función al tiempo. En 2005 Sanjinés (Sanjinés 2005) estudió la relación entre las soluciones del péndulo elástico (de nuevo, bajo la aproximación de pequeñas oscilaciones) y su aplicación a la teoría de bandas en un modelo unidimensional de sólido cristalino; así, una vez que relaciona la ecuación de Mathieu con la ecuación de Schrödinger, utiliza el criterio de la traza para hallar el diagrama de Strutt (que indica las regiones de estabilidad e inestabilidad) y relaciona las regiones estables con un estado físico de aislante eléctrico y las regiones inestables con un estado físico de conductor eléctrico.

La determinación de las regiones de estabilidad e inestabilidad en el péndulo elástico tiene diversas aplicaciones, por ejemplo, en dinámica atmosférica (Lynch 2002), construcción de barcos, aeroplanos, sistemas robóticos, pues se requiere un estrecho rango de variación de parámetros característicos para el correcto funcionamiento de estos dispositivos. En este trabajo usaremos la teoría de Floquet (Sanjinés 1990; Magnus & Winkler 1966) para calcular los parámetros para los cuales hay estabilidad en las soluciones de una ecuación diferencial con coeficientes periódicos; los resultados permitirán elaborar el diagrama de estabilidad correspondiente *sin* invocar la aproximación de pequeñas oscilaciones.

La organización de este artículo es la siguiente. En la Sección II se describe la dinámica del péndulo elástico en coordenadas polares *sin* invocar la aproximación de pequeñas oscilaciones; a partir del sistema acoplado de ecuaciones diferenciales no-lineales se deduce una ecuación diferencial de segundo orden en variable compleja, lo que es posible gracias a un cambio de variable muy oportuno que no es trivial. En la Sección III se supone que la coordenada radial  $r(t)$  varía de manera armónica, por lo que la ecuación de movimiento del péndulo se convierte en una ecuación de Hill (esto es, una ecuación de segundo orden con un coeficiente periódico); en el límite de pequeñas oscilaciones se define las constantes apropiadas para realizar luego la comparación con una ecuación de Mathieu. En la Sección IV se aplica la teoría de Floquet para segmentar el coeficiente periódico de la ecuación de Hill y elaborar el diagrama de estabilidad, que en el límite de pequeñas oscilaciones corresponde al conocido diagrama de Strutt, lo que es consistente con el hecho de que en ese límite se obtiene la ecuación de Mathieu a partir de la ecuación de Hill. En la Sección V se realiza las simulaciones numéricas de las ecuaciones de movimiento *exactas* del sistema (i.e., sin aproximar el coeficiente de la ecuación de Hill por una función constante por tramos); se obtiene un acuerdo bastante bueno entre las predicciones analíticas realizadas para el modelo aproximado y las simulaciones numéricas para el sistema exacto. Finalmente, en los Apéndices se trata los temas complementarios sobre: las aproximaciones para la función de la traza y el diagrama de estabilidad (Apéndice A),

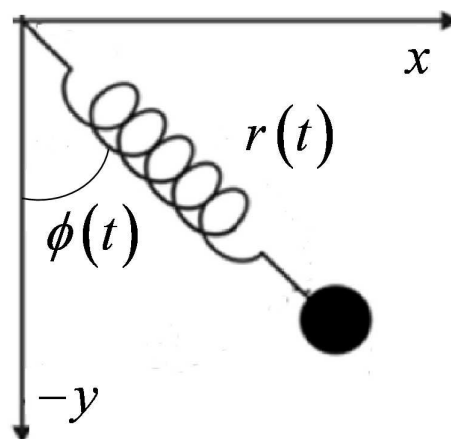


FIG. 1.— Esquema del péndulo elástico con coordenadas polares  $(r, \phi)$  y coordenadas cartesianas  $(x, y)$ .

la ecuación radial (Apéndice B) y el caos en el péndulo elástico (Apéndice C).

## 2. EL PÉNDULO ELÁSTICO

El péndulo elástico es un sistema físico complicado. Si la magnitud de la coordenada radial es constante y las oscilaciones angulares no son pequeñas, se tiene un péndulo simple cuya coordenada angular se expresa en términos de la función elíptica de Jacobi de primera clase (Barker 2010; Goldstein 1980), mientras que el movimiento radial o longitudinal obedece a la ley de Hooke (se supone como aproximaciones válidas que la masa del resorte es despreciable y la constante elástica se mantiene aún para grandes elongaciones).

En general el péndulo elástico es un problema tridimensional cuyo movimiento con tres grados de libertad es complicado. Se ha visto que ocurren fenómenos tales como la flexión del resorte o la alternancia de regímenes de orden y caos, y aunque hay simulaciones numéricas de estos fenómenos, aún no se ha conseguido una solución analítica completa a más de 300 años desde la deducción de sus ecuaciones de movimiento (Fitch 2009; Van Der Weele & De Kleine 1996). Como aproximaciones adicionales a las ya referidas, se supondrá en este trabajo que el péndulo oscila en un plano (dos grados de libertad) y que la coordenada radial depende del tiempo de manera armónica.

A continuación deduciremos las ecuaciones de movimiento del sistema (Fig. 1) para las coordenadas radial  $r(t)$  y angular  $\phi(t)$ . La energía cinética es

$$T = \frac{m}{2}(r^2\dot{\phi}^2 + \dot{r}^2), \quad (1)$$

y la energía potencial es

$$U = \frac{k}{2}(r - r_0)^2 - mgr \cos \phi, \quad (2)$$

así que la energía total es

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{k}{2}(r - r_0)^2 - mgr \cos \phi, \quad (3)$$

donde  $r_0$  es la longitud de relajamiento del resorte,  $m$  es la masa puntual de la carga y  $k$  es la constante elástica.

La condición de equilibrio cuando la masa cuelga bajo el efecto de su peso es

$$\rho = r_0 + \frac{mg}{k}. \quad (4)$$

La función lagrangiana del sistema es  $L = T - U$ :

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{k}{2}(r - r_0)^2 + mgr \cos \phi, \quad (5)$$

así que de las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtiene:

$$r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} + g \sin \phi = 0, \quad (6)$$

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 + \frac{k}{m}(r - r_0) - g \cos \phi = 0. \quad (7)$$

Éste es un sistema no-lineal de ecuaciones diferenciales acopladas que no tiene una solución analítica cerrada, pues posee sólo una constante de movimiento que es la energía total; sin otra constante de movimiento no es posible resolver analíticamente el sistema (Van Der Weele & De Kleine 1996). Multiplicando (6) por  $\cos \phi$ , (7) por  $\sin \phi$ , y sumando ambas ecuaciones, se obtiene:

$$\cos \phi(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) + \sin \phi(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) + \frac{k}{m}r \sin \phi(1 - \frac{r_0}{r}) = 0. \quad (8)$$

De manera similar multiplicamos (6) por  $-\sin \phi$  y (7) por  $\cos \phi$ , de donde obtenemos:

$$\cos \phi(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) - \sin \phi(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) + \frac{k}{m}r \cos \phi(1 - \frac{r_0}{r}) - g = 0. \quad (9)$$

Aunque parece que las nuevas ecuaciones (8) y (9) no son más sencillas que (6) y (7) podemos sin embargo trabajar con ellas. Para ello realizamos el cambio de variable  $\xi = re^{i\phi}$ , con ello el sistema (8) y (9) se reduce a:

$$\ddot{\xi} + \frac{k}{m} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \xi - g = 0. \quad (10)$$

Ésta es una ecuación diferencial de segundo orden en variable compleja, cuya parte real es (9) y cuya parte imaginaria es (8). Para dilucidar las propiedades dinámicas del sistema se puede graficar  $r(\phi)$  o bien proponer una función  $r(t)$  adecuada y resolver (10) para  $\phi(t)$ . La ecuación para  $\xi$  se construye tomando el complejo conjugado de (10):

$$\ddot{\xi}^* + \frac{k}{m} \left(1 - \frac{r_0}{r^*}\right) \xi^* - g = 0, \quad (11)$$

y multiplicando por  $\xi^*$  para obtener:

$$\xi^* \ddot{\xi} + \frac{k}{m} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \xi \xi^* - g \xi^* = 0. \quad (12)$$

Análogamente, multiplicamos (11) por  $-\xi$ :

$$-\xi \ddot{\xi}^* - \frac{k}{m} \left(1 - \frac{r_0}{r^*}\right) \xi \xi^* + g \xi = 0, \quad (13)$$

y se suma (12) y (13):

$$\ddot{\xi} \xi^* - \xi \ddot{\xi}^* - g(\xi^* - \xi) = 0. \quad (14)$$

Esta ecuación para  $\xi$  y su complejo conjugado equivale a (6). De manera similar, restando (12) de (13) se obtiene

el equivalente de (7). Vemos pues que el péndulo elástico se describe efectivamente por (10) ya que de aquí se deducen (6) y (7).

### 3. ECUACIÓN DE HILL

En la ecuación (10) es posible desarrollar (en principio) la función periódica  $r(t)$  en una serie de Fourier, por lo que (10) tendrá un coeficiente periódico. Ésta es la ecuación de Hill (Magnus & Winkler 1966). No obstante no seguiremos ese procedimiento en este trabajo sino que se propondrá un modelo simple para  $r(t)$ :

$$r(t) = \rho - a \cos \omega t, \quad (15)$$

donde  $a$  es la amplitud de oscilación (que no se considera pequeña) y  $\omega$ , como se verá, es la frecuencia de oscilación de la coordenada radial. Reemplazando (15) en (10) se obtiene:

$$\ddot{\xi} + \left( \frac{g - (ak/m) \cos \omega t}{\rho - a \cos \omega t} \right) \xi - g = 0. \quad (16)$$

Esta ecuación se reduce a una ecuación de Mathieu para el caso de pequeñas oscilaciones. Tal reducción nos permitirá relacionar las variables de los ejes del diagrama de Strutt con las correspondientes del diagrama de estabilidad para nuestra ecuación de Hill (sección V).

A continuación proyectamos  $\xi(t)$  en coordenadas cartesianas:

$$\xi(t) = r(t)e^{i\phi(t)} = r \cos \phi + ir \sin \phi = -y(t) + ix(t); \quad (17)$$

derivando dos veces obtenemos:

$$\ddot{\xi} = -\ddot{y} + i\ddot{x}, \quad (18)$$

de donde se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas al sustituir (17) y (18) en (16):

$$\ddot{y} + \left( \frac{g - (ak/m) \cos \omega t}{\rho - a \cos \omega t} \right) y + g = 0, \quad (19)$$

$$\ddot{x} + \left( \frac{g - (ak/m) \cos \omega t}{\rho - a \cos \omega t} \right) x = 0. \quad (20)$$

Si hacemos  $a \simeq 0$  en la ecuación de Hill (20) y desarrollamos el denominador en serie para  $a$  alrededor de cero se obtiene:

$$\ddot{x} + \left( \frac{g}{\rho} - \frac{a\omega^2 r_0 \cos \omega t}{\rho^2} \right) x = 0. \quad (21)$$

Ésta es la ecuación de Mathieu que posee como coeficiente periódico una función armónica en el numerador. Comparando con las halladas en Olsson (1976); Sanjinés (2005) se ve que poseen la misma estructura y las mismas constantes, con la siguiente identificación:  $\delta = g/\rho$  y  $\lambda = a\omega^2 r_0/\rho^2 = akr_0/m\rho^2$  ( $\delta$  y  $\lambda$  son constantes); así, identificamos  $\omega^2 = k/m$  y se prueba que nuestra ecuación de Hill se reduce a una ecuación de

Mathieu. De manera equivalente, este resultado se obtiene también multiplicando el segundo término de (20) en el numerador y denominador por  $\rho + a \cos \omega t$ :

$$\ddot{x} + \frac{(g\rho - \omega^2 a^2 \cos^2 \omega t) - (\omega^2 r_0 a \cos \omega t)}{\rho^2 - a^2 \cos \omega t} x = 0. \quad (22)$$

Si  $a$  tiende a cero se desprecia el término cuadrático y se obtiene nuevamente (21). Ahora que hemos encontrado la constante  $\omega$ , volvamos a la ecuación de Hill (20). Factorizando  $\rho$  en el denominador del coeficiente, obtenemos dicha ecuación donde se introducen las constantes  $\alpha$  y  $\beta$ :

$$\ddot{x} + \frac{\beta - \alpha \cos \pi \tau}{1 - (\alpha/\pi^2) \cos \pi \tau} x(\tau) = 0, \quad (23)$$

donde

$$\alpha = \frac{a\pi^2}{\rho}, \quad \beta = \frac{g\pi^2}{\rho\omega^2}, \quad \pi\tau = \omega t. \quad (24)$$

En adelante identificaremos por  $Q(\tau)$  al coeficiente periódico de la ecuación de Hill (23).

#### 4. APROXIMACIÓN DE LA FUNCIÓN $Q(\tau)$

Consideremos a continuación la función  $Q(\tau)$ :

$$Q(\tau) = \frac{\beta - \alpha \cos \pi \tau}{1 - (\alpha/\pi^2) \cos \pi \tau}. \quad (25)$$

A fin de elaborar el correspondiente diagrama de estabilidad para la ecuación de Hill debemos modelar  $Q(\tau)$  por una función constante por tramos sin singularidades (ver Figs. 2 (a), 2 (b) y 2 (c)), es decir,

$$\tau \neq \arccos(\rho/a) - 2n\pi, \quad (26)$$

con  $n$  un número entero y

$$0 < \alpha < \beta\rho\omega^2/g. \quad (27)$$

En la Fig. 2 (a) y 2 (b) se verifica un comportamiento periódico (cosenoidal) cuando se dan las condiciones expresadas arriba; si dichas condiciones no se cumplen entonces  $Q(\tau)$  es singular (Fig. 2 (c)) o posee una forma periódica complicada. A continuación segmentemos  $Q(\tau)$  modelándola por la siguiente función constante por tramos

$$Q(\tau) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\beta - \alpha}{1 - (\alpha/\pi^2)} \quad \text{si } 0 \leq \tau < 1, \\ \frac{\beta + \alpha}{1 + (\alpha/\pi^2)} \quad \text{si } 1 \leq \tau < 2. \end{array} \right\} \quad (28)$$

La condición (27) parecería restringir el valor de  $a$  de tal forma que no sería posible determinar las regiones de estabilidad sin la aproximación de oscilaciones pequeñas pues  $a$  posee una cota superior. Veamos que éste no es el caso. A partir de (15) se tiene que, para los valores extremos de  $\cos \omega t$ ,  $r = r_0 + mg/k \pm a$ , con  $a \simeq r_0 + mg/k$  (condición (27)), así que:

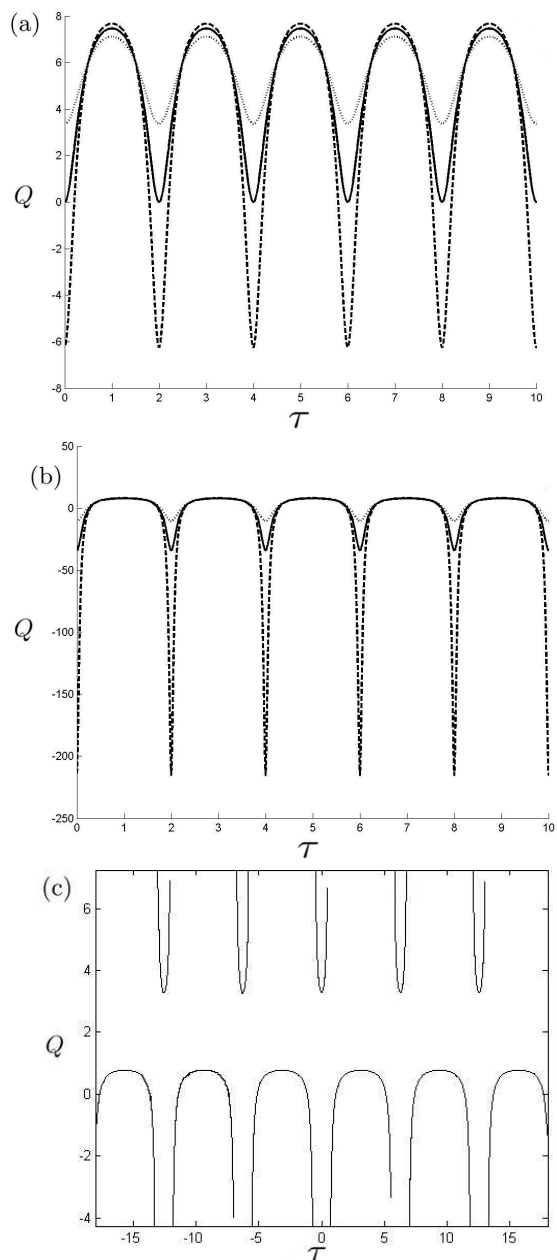


FIG. 2.— Comportamiento de la función  $Q(\tau)$  para diferentes valores de  $\alpha$ . (a) La función  $Q(\tau)$  es periódica y puede aproximarse por una función constante por tramos cuando  $\alpha < \pi^2$  (lo que significa que  $a < \rho$ , donde  $\rho = r_0 + mg/k$ ). Con  $\alpha = 4$  (línea punteada),  $\alpha = 7.5$  (línea segmentada) y  $\alpha = 6$  (línea sólida). (b) Forma de  $Q(\tau)$  a medida que  $\alpha$  se aproxima a su cota superior. Se observa que aún  $Q(\tau)$  se puede modelar por una función constante por tramos. Con  $\alpha = 8$  (línea punteada),  $\alpha = 9.7$  (línea segmentada) y  $\alpha = 9$  (línea sólida). (c) Cuando  $\alpha > \pi^2$  la función  $Q(\tau)$  aún es periódica pero tiene singularidades (o es demasiado complicada) como para modelarla por una función constante por tramos. Se ha tomado el valor  $\beta = 6$  en las gráficas (a), (b) y (c).

$$r_{max} \simeq 2(r_0 + mg/k), \quad (29)$$

$$r_{min} \simeq 0. \quad (30)$$

De esta manera, el acotamiento de  $a$  evita que la

longitud del péndulo sea cero o negativa y al mismo tiempo permite una elongación máxima correspondiente a su longitud de equilibrio (29). Así, el tratamiento del péndulo elástico presentado en este trabajo ya no se restringe a pequeñas oscilaciones.

##### 5. FUNCIÓN DE LA TRAZA Y DIAGRAMA DE ESTABILIDAD

Para elaborar el diagrama de estabilidad seguimos el criterio de la traza que se deduce de la teoría de Floquet (Sanjinés 2005, 1990; Magnus & Winkler 1966). Expresamos (23) en forma matricial:

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$\frac{d}{d\tau} X(\tau) = \Gamma(\tau)X(\tau). \quad (32)$$

El vector  $X$  definido así en (32) contiene a la función  $x(\tau)$  y a su derivada. La solución formal para  $X(\tau)$  se puede expresar en términos de la condición inicial  $X(\tau_0)$  y de la matriz de evolución  $T(\tau, \tau_0)$ :

$$X(\tau) = T(\tau, \tau_0)X(\tau_0). \quad (33)$$

Combinando (33) y (32) se obtiene la ecuación diferencial:

$$\frac{d}{d\tau} T(\tau, \tau_0) = \Gamma(\tau)T(\tau, \tau_0), \quad (34)$$

$$S = 2 \cos \sqrt{\frac{\beta + \alpha}{1 + \alpha/\pi^2}} \cos \sqrt{\frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha/\pi^2}} - 2 \frac{\beta - (\alpha^2/\pi^2)}{\sqrt{(\beta^2 - \alpha^2)[1 - (\alpha/\pi^2)^2]}} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{\beta + \alpha}{1 + \alpha/\pi^2}} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha/\pi^2}}, \quad (37)$$

con  $T(\tau_j, \tau_i)$  calculada según (35) para los valores constantes de  $\Gamma(z)$  en (32) que corresponden a  $Q(\tau)$  dado en (28). Si el valor de  $a$  es muy pequeño la ecuación (37) corresponde a las regiones de estabilidad para oscilaciones pequeñas, lo que equivale a  $\alpha \approx 0$  en el diagrama de estabilidad (apéndice A). En la Fig. 3 se muestra el diagrama de estabilidad obtenido con la condición  $|S| \leq 2$ .

##### 6. SIMULACIONES NUMÉRICAS

Ahora volvamos al sistema (6)-(7) y trabajemos con las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} r(0) &= r_0[\pi^2/(\pi^2 - \beta)] - a; \phi(0) = 0.017 \\ \dot{r}(0) &= \dot{\phi}(0) = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

donde se ha utilizado (24) para relacionar  $\beta$  con la condición inicial radial;  $r_0$  se mide en metros; el ángulo inicial es  $1^\circ = 0.017$  rad. (e iguales resultados se obtiene para  $\phi(0) < 1.53$  rad.) El régimen de inestabilidad corresponde al fenómeno de "resonancia paramétrica" definido como el régimen en el que la transferencia de

( $T(\tau_0, \tau_0) = 1$ ) cuya solución formal es:

$$T(\tau, \tau_0) = e^{\int_{\tau_0}^{\tau} \Gamma(z) dz}. \quad (35)$$

La matriz de evolución (matriz de Floquet) es unimodular y consiste de un mapeo biparamétrico o aplicación lineal que posee las propiedades de grupo abeliano; esta matriz cumple la propiedad de composición:

$$T(\tau_m, \tau_0) = T(\tau_m, \tau_{m-1})T(\tau_{m-1}, \tau_{m-2}) \dots T(\tau_1, \tau_0). \quad (36)$$

Esta propiedad será útil para calcular la matriz de evolución resultante de una región segmentada donde en cada intervalo (segmento) la integral (35) se pueda calcular de manera exacta (Magnus & Winkler 1966; Sanjinés 2002). Luego, se aplica la condición de estabilidad usual en (33) con  $T(\tau, \tau_0)$  ya calculada:  $X_1(\tau)$  y  $X_2(\tau)$ , con condiciones iniciales  $X_1(0)$  y  $X_2(0)$ , son soluciones estables de (32) si para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  de tal forma que si  $|X_1(0) - X_2(0)| < \delta$ , entonces  $|X_1(\tau) - X_2(\tau)| < \epsilon$  ( $\tau > 0$ ). Así, las regiones de estabilidad para los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  dados en (24) se determinan si la función de la traza  $S(\alpha, \beta) \equiv \operatorname{Tr}(T(L, 0)) \in (-2, 2)$ , donde  $L$  es el periodo de la matriz de evolución; éste es el criterio de la traza (Sanjinés 2005, 2002). En estas regiones la norma de  $X(\tau)$  se mantiene acotada. Vale la pena mencionar que el criterio de la traza utilizado en este trabajo lleva al mismo resultado que el obtenido por el algoritmo de Meissner (Magnus & Winkler 1966). Ahora podemos aplicar el criterio de la traza a la función  $Q(\tau)$  dada en (28). El resultado para  $S = \operatorname{Tr}(T(\tau_2, \tau_1)T(\tau_1, \tau_0))$  es:

energía es óptima entre los modos radial y angular (Ols-son 1976); esta condición ocurre cuando la frecuencia radial es el doble de la frecuencia angular, lo que corresponde a  $\beta = (\pi/2)^2$  y, de manera equivalente, a que el cociente de las longitudes (en reposo) del resorte cargado y sin cargar sea  $r_0/\rho = 4/3$  (Sanjinés 2005). En efecto, se puede verificar en la Figs. 4 (a) y 4 (b) la inestabilidad del sistema (resonancia paramétrica). En las Figs. 4 (c) y 4 (d) se muestra casos del régimen de estabilidad donde los modos de oscilación no se alternan, es decir, la energía se mantiene en cada modo. Un caso extremo de esta situación ocurre cuando  $\phi(0) = 0$ : la energía del sistema se mantiene en el modo radial y el modo angular no se excita pues nunca recibe energía del modo radial, por lo que  $\phi(t) = 0$  para  $t > 0$ . La simulación numérica de este caso es trivial por lo que no se incluye en los casos de la Fig. 4; de todas maneras se realizó a fin de verificar la precisión numérica del algoritmo para resolver el sistema (6) - (7).

Los gráficos anteriores, que se obtuvieron resolviendo numéricamente el sistema de ecuaciones (6)-(7), corresponden a los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  extraídos del diagrama de

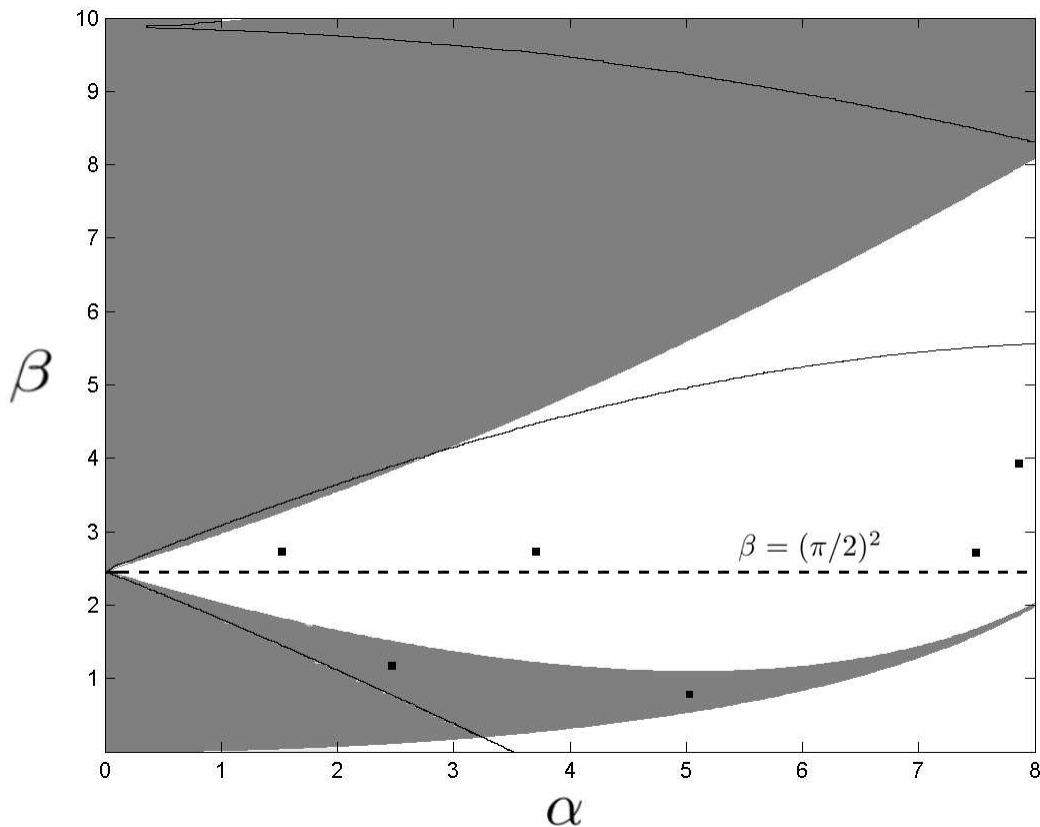


FIG. 3.— Las regiones oscuras y claras corresponden a los regímenes de estabilidad e inestabilidad respectivamente. Comparación de diagramas de estabilidad: la región con borde negro corresponde al diagrama de Strutt obtenido en Sanjinés (2005) y la región oscura corresponde al diagrama de estabilidad obtenido de la ecuación (37). Nótese la coincidencia de ambos diagramas hasta el valor de  $\alpha \simeq 0.2$ . Los puntos negros representan los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  tomados para las simulaciones de la Fig. 4 y cuyos casos, en orden creciente de  $\alpha$ , son: (a), (c), (b), (d), (g), (e).

estabilidad para valores arbitrarios de las coordenadas radial y angular.

Recordemos, sin embargo, que este diagrama de estabilidad es aproximado pues se elaboró con base en una función  $Q(\tau)$  constante por tramos (sección IV), pero para efectos prácticos resulta bastante bueno. Debemos indicar que la condición de resonancia paramétrica ( $\beta = (\pi/2)^2$ ) no es única, pues otros valores de  $\beta$  corresponden al régimen de inestabilidad, sin embargo podemos afirmar cualitativamente que  $\beta = (\pi/2)^2$  hace que el sistema transfiera más eficientemente la energía entre los modos radial y angular. Cuando  $\beta = (\pi/2)^2$  no se puede dar la elongación máxima al péndulo pues la masa choca con el punto de suspensión; así, el valor máximo de elongación inicial es  $a \simeq r_0 + \tilde{r}_0$  con  $mg/k \gg \tilde{r}_0$ . Para  $\beta = (2\pi/5)^2$  no ocurre tal choque y por lo tanto  $a \simeq r_0 + mg/k$  puede tomar este valor máximo, lo que es consistente con el diagrama de estabilidad (ver Figs. 3, 4 (e), 4 (f), 4 (g) y 4 (h)). El diagrama de estabilidad aproximado que se obtuvo en este trabajo es bastante preciso en las regiones estables  $\beta > (\pi/2)^2$  pero menos preciso en  $\beta < (\pi/2)^2$ . Nótese que para  $\beta > \alpha$  las áreas de estabilidad son más grandes que para  $\beta < \alpha$ , lo que significa que los resortes con longitudes de relajación pequeñas y valores grandes de la constante elástica tienden a ser inestables cuando son sometidos a elongaciones (o compresiones) grandes.

## 7. PÉNDULO ELÁSTICO AMORTIGUADO

Consideremos las ecuaciones de Euler-Lagrange para un sistema disipativo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad (39)$$

donde  $\mathcal{F} = \sum_i \kappa_i \dot{q}_i^2 / 2$  es la función de disipación de Rayleigh que corresponde a una fuerza disipativa proporcional a la velocidad (Goldstein 1980). Para el caso del péndulo elástico en coordenadas polares se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} + g \sin \phi + \frac{\kappa_2}{m} r\dot{\phi} = 0, \quad (40)$$

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 + \frac{k}{m}(r - r_0) - g \cos \phi + \frac{\kappa_1}{m} \dot{r} = 0. \quad (41)$$

Para coeficientes de fricción iguales  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$  las dos ecuaciones anteriores se expresan de manera compacta (con  $\xi = re^{i\phi}$ ):

$$\ddot{\xi} + \kappa \dot{\xi} + \frac{k}{m} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \xi - g = 0, \quad (42)$$

donde se han realizado operaciones análogas a las de la sección II con un coeficiente de disipación constante. La anterior ecuación es una ecuación de Hill con  $r(t)$

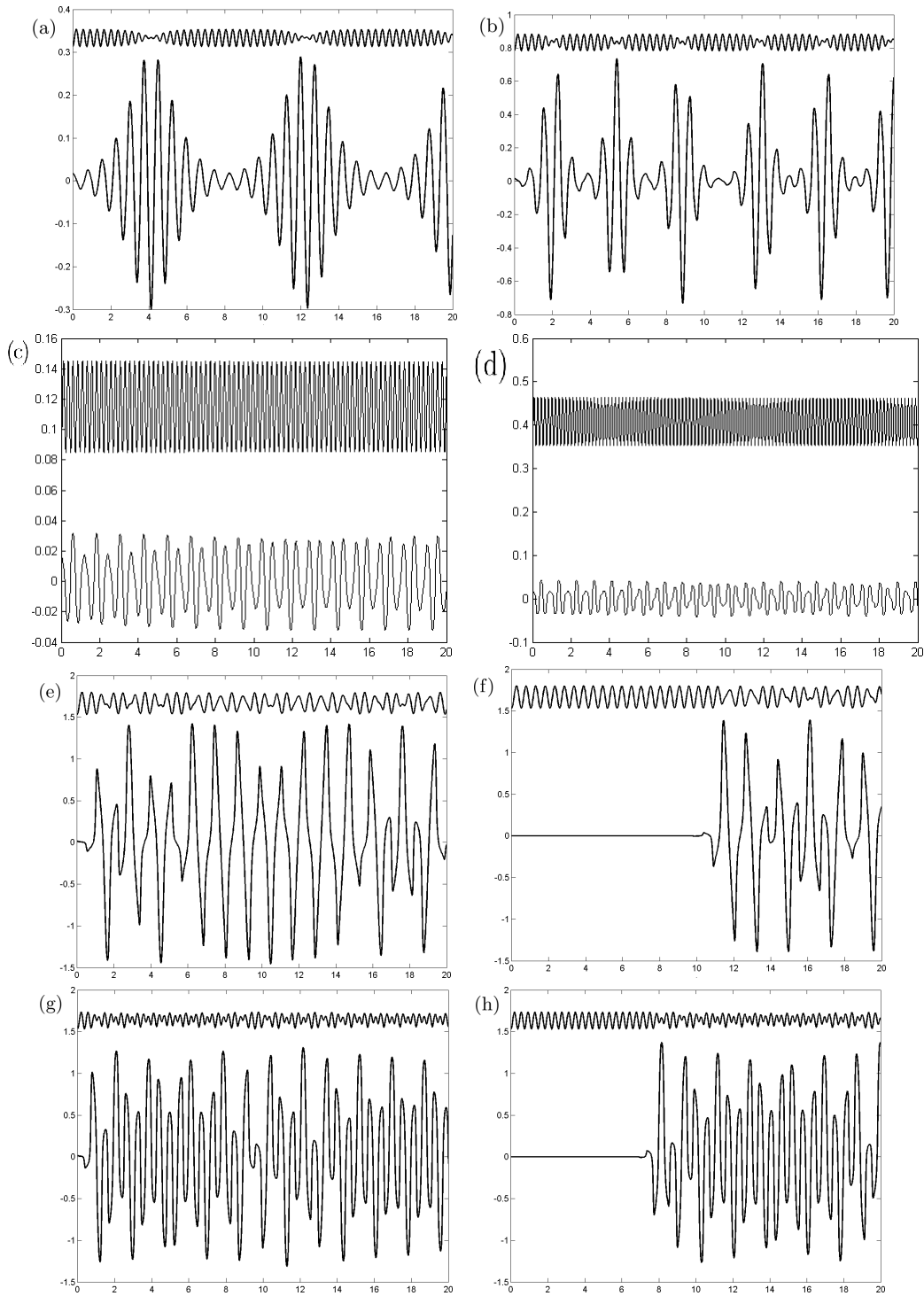


FIG. 4.— Gráficas de  $r(t)$  (curva superior) y  $\phi(t)$  (curva inferior). La coordenada radial está medida en metros, la coordenada angular está medida en radianes y el tiempo está medido en segundos. Los valores de  $r(t)$  se desplazaron por un  $\Delta r$  conveniente a fin de distinguirlos de los valores de  $\phi(t)$ . Los valores de  $(r(0), \phi_{max})$  con un ángulo inicial  $\phi(0) = 0.017$  rad son : (a) (0.12, 0.28), (b) (0.15, 0.785), (c) (0.13, 0.031), (d) (0.053, 0.042), (e) (0.233, 1.5), (g) (0.201, 1.44). Los casos (f) y (h) corresponden a (e) y (f) respectivamente, con un ángulo inicial  $10^{-20}$  rad. Los valores de  $(\alpha, \beta)$  son : (a) (1.48, 2.47), (b) (3.70, 2.47), (c) (2.57, 1.29), (d) (5.0, 0.76), (e) (7.88, 3.95), (g) (7.48, 2.47).

periódica según (15). En coordenadas cartesianas se obtiene:

$$\ddot{x} + \kappa \dot{x} + \frac{k}{m} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) x = 0, \quad (43)$$

$$\ddot{y} + \kappa \dot{y} + \frac{k}{m} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) y - g = 0. \quad (44)$$

Así, el movimiento en el eje  $x$  obedece la ecuación:

$$\ddot{x} + \kappa \dot{x} + \left(\frac{g - a\omega^2 \cos \omega t}{\rho - a \cos \omega t}\right) x = 0, \quad (45)$$

que con el cambio de variable  $x(t) = e^{-\kappa t/2} \chi(t)$  conduce a:

$$\ddot{\chi} + \left(\frac{g - a\omega^2 \cos \omega t}{\rho - a \cos \omega t} - \frac{1}{4}\epsilon^2\right) \chi(t) = 0, \quad (46)$$

donde se definió el coeficiente de disipación  $\epsilon = \kappa\pi/\omega$ . Esta ecuación posee la misma estructura que en el caso del movimiento del péndulo sin disipación, por lo tanto se puede repetir el criterio de la traza de la teoría de Floquet y obtener la traza de matriz de evolución y luego el correspondiente diagrama de estabilidad. Así, (46) se reescribe (con  $\omega t = \pi\tau$ ) como :

$$\ddot{\chi} + \left(\frac{\beta - \alpha \cos \pi\tau}{1 - (\alpha/\pi^2) \cos \pi\tau} - \frac{1}{4}\epsilon^2\right) \chi(\tau) = 0, \quad (47)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  tiene el mismo significado que en el caso del péndulo elástico sin fricción. Luego, la traza de la matriz de evolución resulta ser:

$$S_1 = 2 \cos B_1 \cos B_2 - 2 \frac{\beta - \epsilon^2/4 - (\alpha^2/\pi^2)(1 - \epsilon^2/4\pi^2)}{\sqrt{[(\beta - \epsilon^2/4)^2 - \alpha^2(1 - \epsilon^2/4\pi^2)^2][1 - (\alpha/\pi^2)^2]}} \sin B_1 \sin B_2, \quad (48)$$

donde:

$$B_1 = \sqrt{\frac{(\beta - \frac{1}{4}\epsilon^2) + \alpha(1 - \epsilon^2/4\pi^2)}{1 + \alpha/\pi^2}}, \quad (49)$$

$$B_2 = \sqrt{\frac{(\beta - \frac{1}{4}\epsilon^2) - \alpha(1 - \epsilon^2/4\pi^2)}{1 - \alpha/\pi^2}}. \quad (50)$$

Nótese que si el coeficiente de disipación es cero se recupera el resultado del péndulo elástico sin fricción, como debe ser. ¿Qué cambios induce el término disipativo en el diagrama de estabilidad y en la solución para  $x(\tau)$ ? Si la variable  $\epsilon$  es pequeña el diagrama de estabilidad se mantiene prácticamente inalterado; sin embargo, mientras mayor sea su valor el área de las regiones estables se altera. Las amplitudes de las oscilaciones (radiales y angulares) se van amortiguando con el tiempo de manera exponencial. Así, el péndulo elástico con fricción aún exhibe el fenómeno de resonancia paramétrica y se espera que el diagrama de estabilidad correspondiente se modifique.

## 8. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

En este trabajo se elaboró un procedimiento aproximado para hallar las regiones de estabilidad de un modelo de péndulo elástico con dos grados de libertad; no se invocó la aproximación de pequeñas oscilaciones, así que los resultados de este trabajo son una generalización de aquellos que se presentaron en Sanjinés (2005). La fórmula (10) y (42) son novedosas y comprenden las ecuaciones dinámicas del péndulo elástico para el caso general de oscilaciones de amplitud arbitraria. Se logró aplicar el criterio de la traza de la matriz de evolución a la ecuación de Hill (deducida a partir de (10)) por medio de la segmentación del coeficiente periódico  $Q(\tau)$  en dos partes y de aquí se obtuvo el correspondiente diagrama de estabilidad (Fig. 3) que es una generalización del

conocido diagrama de Strutt. En el límite de pequeñas oscilaciones se recupera todos los resultados conocidos. Aunque la segmentación elegida para  $Q(\tau)$  ciertamente es burda, el diagrama de estabilidad (Fig. 3) es razonablemente bueno, al menos para los puntos señalados en los que el comportamiento dinámico del péndulo es el que se espera según (10).

Se observa que las regiones de estabilidad se encogen a medida que aumenta la amplitud de las oscilaciones radiales hasta llegar a desaparecer completamente (en el régimen de resonancia paramétrica), lo que también se observa en el diagrama de Strutt, aunque este último no permite una interpretación válida para la estabilidad de oscilaciones de gran amplitud. En el diagrama de estabilidad obtenido en este trabajo se observa que no existe estabilidad para el valor  $\beta = (\pi/2)^2$ , lo que corresponde al “péndulo elástico 4/3” reportado en Sanjinés (2005), lográndose así una interpretación física consistente del fenómeno de resonancia paramétrica para este sistema. Considerando que la elongación máxima posible (en el modo radial) corresponde a la longitud de equilibrio del resorte cargado, se observa la predominancia de regiones de inestabilidad, salvo los casos extremos en donde la masa del sistema es muy pequeña o la constante del resorte es muy grande.

Una perspectiva interesante de este trabajo es refinar la dependencia temporal de  $r(t)$  dada por (15), en vista de los resultados de las Figs. 4(a) y 4(b), donde se aprecia una envolvente en las oscilaciones de  $r(t)$  con un periodo  $T = 2\pi/\omega'$  que corresponde a la transición entre los regímenes radial y angular. Se podría tratar por ejemplo,  $r(t) = \rho - a \cos(\omega t)(\cos \omega' t)$ . Este refinamiento, así como una segmentación más fina de  $Q(\tau)$ , seguramente mejorarán la precisión del diagrama de estabilidad (Fig. 3). Notemos, sin embargo, que a lo largo de la “lengua de estabilidad” (en la que se encuentra el



punto  $(\alpha, \beta) = (5, 0.76)$ ) la amplitud de las oscilaciones de  $r(t)$  se mantiene aproximadamente constante pues no se transfiere energía al modo angular; esto es lo que se observa en las Figs. 4(c) y 4(d). Por lo tanto el refinamiento en el modelo de  $r(t)$  dado por (15) no afectará a la envolvente de las oscilaciones pero probablemente modificará su frecuencia, incluyendo el eventual caso de caos (Apéndice C).

Por otra parte, de manera inesperada se observó un comportamiento interesante (Figs. 4(f), 4(h)): en el régimen de resonancia paramétrica (inestabilidad) correspondiente a  $\beta = (\pi/2)^2$ , para un ángulo inicial del orden de  $10^{-20}$  rad (!) el péndulo tarda un tiempo apreciable de varios segundos (que es mayor mientras menor es el ángulo inicial) en cambiar del modo de oscilación radial al modo angular; cuando el ángulo inicial es cero el sistema aparentemente no cambia al modo angular, al menos dentro del intervalo temporal considerado. El que este fenómeno sea un resultado solamente de la simulación computacional o pueda corresponder a un fenómeno físico *bona fide* queda como un tema abierto para una investigación futura.

### Conflicto de intereses

Los autores declaran que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

## APÉNDICE

### A. APROXIMACIONES PARA LA FUNCIÓN DE LA TRAZA Y EL DIAGRAMA DE ESTABILIDAD

Hagamos el cambio de variable  $\pi\tau = \omega t$  en la ecuación de Mathieu (21):

$$\ddot{x} + q(\tau)x(\tau) = 0, \quad (\text{A1})$$

con  $q(\tau) = (\beta - \nu \cos \pi\tau)$ ,  $\beta = g\pi^2/\rho\omega^2$  y  $\nu = \pi^2 ar_0\omega^2/\rho^2\omega^2$ . Si aproximamos  $q(\tau)$  por una función constante por tramos:

$$q(\tau) = \left\{ \begin{array}{l} \beta - \nu, \quad 0 \leq \tau < 1 \\ \beta + \nu, \quad 1 \leq \tau < 2, \end{array} \right\} \quad (\text{A2})$$

se obtiene la siguiente función de la traza:

$$S = 2 \cos \sqrt{\beta + \nu} \cos \sqrt{\beta - \nu} - \frac{2\beta \sin \sqrt{\beta + \nu} \sin \sqrt{\beta - \nu}}{\sqrt{(\beta^2 - \nu^2)}}, \quad (\text{A3})$$

cuya gráfica se muestra en la Fig. A1 y fue tomada de Sanjinés (2005).

A continuación veamos el caso particular de la función de la traza (37) para la ecuación de Mathieu (caso de pequeñas oscilaciones). Notemos que el eje de las ordenadas es el mismo en ambos diagramas pero no así el eje de las abscisas; manipulemos entonces el parámetro  $\alpha$  de (37) para lograr la coincidencia de las escalas de ese

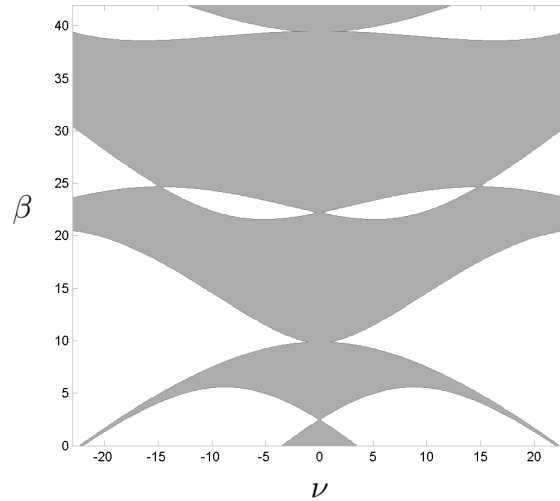


FIG. A1.— Aproximación del diagrama de Strutt para pequeñas oscilaciones calculado por el método de la matriz de evolución Sanjinés 2005.

eje:

$$\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha/\pi^2} = (\alpha + \beta) \left(1 - \frac{\alpha}{\pi^2} + \frac{\alpha^2}{\pi^2} - \dots\right) \quad (\text{A4})$$

$$\approx \beta + \alpha \left(1 - \frac{\beta}{\pi^2}\right), \quad (\text{A5})$$

$$\approx \beta + \frac{ar_0\pi^2}{\rho^2} \approx \beta + \nu, \quad (\text{A6})$$

con  $\nu = ar_0\pi^2/\rho^2$ , donde se despreciaron potencias de  $\alpha$  mayores a dos (según  $\alpha$  y  $\beta$  dados en (24)). Se procede de manera similar para obtener el siguiente factor:

$$\frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha/\pi^2} = (\beta - \alpha) \left(1 + \frac{\alpha}{\pi^2} + \dots\right) \approx \beta - \nu. \quad (\text{A7})$$

A continuación trabajemos el término:

$$\frac{2(\beta - \alpha^2/\pi^2)}{\sqrt{(\beta^2 - \alpha^2)(1 - \alpha^2/\pi^4)}} \approx \frac{2\beta}{\sqrt{(\beta^2 - \nu^2)}}, \quad (\text{A8})$$

donde en el numerador se despreció potencias de la amplitud mayores a dos y en el denominador se utilizó los resultados (A6) y (A7). La función de la traza que resulta es:

$$S = 2 \cos \sqrt{\beta + \nu} \cos \sqrt{\beta - \nu} - \frac{2\beta \sin \sqrt{\beta + \nu} \sin \sqrt{\beta - \nu}}{\sqrt{(\beta^2 - \nu^2)}}, \quad (\text{A9})$$

que es el mismo resultado que se obtuvo en Sanjinés (2005) (Fig. A1).

El método de aproximar una función continua  $Q(\tau)$  por una función constante por tramos (segmentación de la función) es más preciso mientras más funciones constantes por tramos se tomen, lo que mejora a su vez la precisión del diagrama de estabilidad asociado a la ecuación de Hill cuyo coeficiente periódico es  $Q(\tau)$  (sección IV). Para una secuencia infinita de funciones continuas por tramos el diagrama de estabilidad se aproxima mejor al diagrama verdadero, pero aún no lo es debido a la limitación impuesta por la aproximación

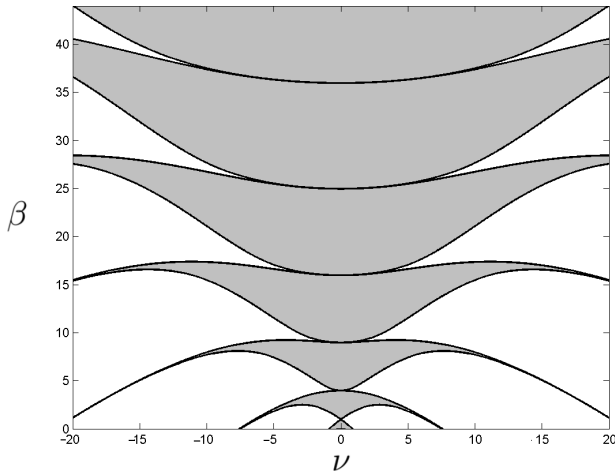


FIG. A2.— Diagrama de estabilidad de Strutt exacto calculado por métodos perturbativos (u otros métodos tradicionales).

para  $r(t)$  en (15). Sin embargo, el cálculo de la función de la traza a medida que aumenta la segmentación de  $Q(\tau)$  se hace demasiado complicado. En algunos casos es posible calcular directamente la función de la traza integrando  $Q(\tau)$ . Para ilustrar tal método obtendremos el diagrama de Strutt integrando de manera directa la matriz de transferencia a partir de la ecuación de Mathieu (21):

$$\ddot{x} + (g/\rho - \frac{a\omega^2 r_0 \cos \omega t}{\rho^2})x(t) = 0, \quad (\text{A10})$$

que con el cambio de variable  $\omega t = 2\eta$  adopta su forma estándar:

$$\ddot{x} + (\beta' - 2\alpha' \cos 2\eta)x(\eta) = 0, \quad (\text{A11})$$

donde  $\alpha' = 2ar_0/\rho^2$  y  $\beta' = 4g/\rho\omega^2$ . De manera equivalente, la solución de (A11) se expresa en forma matricial

$$S_0 = 2 \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\beta' + 4\alpha'/\pi} \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\beta' - 4\alpha'/\pi} - \frac{2\beta' \sin \frac{\pi}{2} \sqrt{\beta' + 4\alpha'/\pi} \sin \frac{\pi}{2} \sqrt{\beta' - 4\alpha'/\pi}}{\sqrt{\beta'^2 - (4\alpha'/\pi)^2}}. \quad (\text{A18})$$

El mismo resultado puede hallarse si segmentamos la matriz de evolución en cuatro partes; así, la matriz total es el producto de cuatro matrices que conmutan y a las que se aplican propiedades de grupo abeliano (Sanjinés 1990, 2002). El resultado para el diagrama de estabilidad se muestra en la Fig. A4 (región oscura) y se compara con el diagrama de Strutt exacto (curva negra).

A continuación apliquemos el anterior procedimiento para calcular el diagrama de estabilidad para el péndulo elástico sin la restricción de oscilaciones pequeñas. Partimos de (20):

$$\ddot{x} + (\frac{g - (ak/m) \cos \omega t}{\rho - a \cos \omega t})x = 0, \quad (\text{A19})$$

como se hizo en (31)-(35):

$$T(\pi, 0) = \exp \int_0^\pi \Gamma(\eta) d\eta, \quad (\text{A12})$$

con:

$$\Gamma(\eta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mathcal{G} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A13})$$

y con  $\mathcal{G} = (\beta' - 2\alpha' \cos 2\eta)$ ; así, el primer paso para encontrar la matriz de evolución es resolver la integral:

$$\mathcal{M}(\alpha', \beta') = \int_0^{p=\pi} \mathcal{G}(\eta) d\eta, \quad (\text{A14})$$

donde  $p$  es el periodo, y  $\mathcal{M}(\alpha', \beta')$  es una función de dos variables. Para el caso de la ecuación de Mathieu el resultado de la integración anula la variable  $\alpha'$ , de tal manera que no es posible calcular la función de la traza con argumentos  $\alpha'$  y  $\beta'$ :

$$\mathcal{M}(\alpha', \beta') = \int_0^{p=\pi} (\beta' - 2\alpha' \cos 2\eta) d\eta = \pi\beta'. \quad (\text{A15})$$

Esto ocurre por la simetría impar del resultado de integrar  $\mathcal{G}$  en nuestro caso particular. Una forma de evitar eso es aprovechar las propiedades de simetría de la siguiente forma:

$$\int_0^{p=\pi} \mathcal{G}(\eta) d\eta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathcal{G}(\eta) d\eta + 2 \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{G}(\eta) d\eta \right|, \quad (\text{A16})$$

de donde se obtiene:

$$\mathcal{M}(\alpha', \beta') = \int_0^\pi \mathcal{G}(\eta) d\eta = \frac{\pi}{2} (\beta' - \frac{4\alpha'}{\pi}) + \left| \frac{\pi}{2} (\beta' + \frac{4\alpha'}{\pi}) \right|. \quad (\text{A17})$$

Vemos pues que se recuperó el parámetro  $\alpha'$ . Ahora podemos hallar la función de la traza:

y realizando el cambio de variables  $2\eta = \omega t$ :

$$\ddot{x} + (\frac{\beta' - 2\alpha'' \cos 2\eta}{1 - (\alpha''/2) \cos 2\eta})x = 0, \quad (\text{A20})$$

donde  $\alpha'' = 2a/\rho$  y  $\beta' = 4g/\omega^2\rho$ ; requerimos la integral:

$$\mathcal{M}(\alpha'', \beta') = \int_0^p \mathcal{G}(\eta) d\eta = \int_0^p \frac{\beta' - 2\alpha'' \cos 2\eta}{1 - \frac{\alpha''}{2} \cos 2\eta} d\eta, \quad (\text{A21})$$

donde  $p = \pi$  es el periodo de la función. Suponemos  $\alpha < 2$  que es la restricción para que la longitud del péndulo elástico no sea negativa, lo que equivale a que la máxima elongación del modo radial sea igual a la longitud de equilibrio del péndulo cargado; así, el denominador de

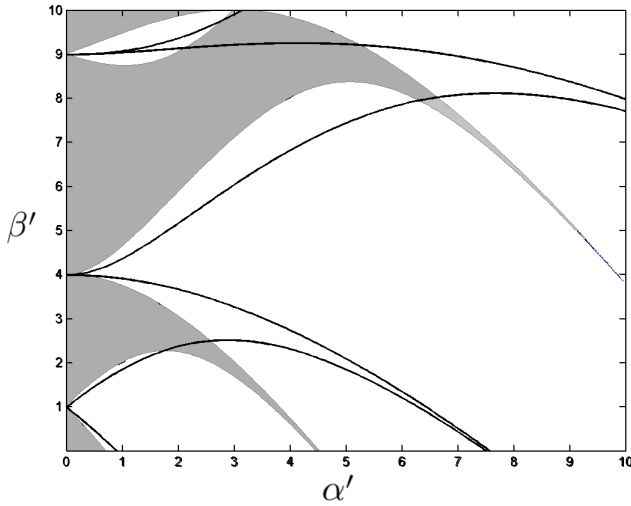


FIG. A3.— Diagrama de Strutt (borde negro) y la aproximación encontrada en Sanjinés (2005) (región oscura) en la misma escala.  $Q(\tau)$  se segmentó en 2 partes.

la integral anterior se desarrolla en serie:

$$\int_0^p (\beta' - 2\alpha'' \cos 2\eta) \left( \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha''}{2}\right)^m \cos^m 2\eta \right) d\eta, \quad (\text{A22})$$

$$\mathcal{M} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha''}{2}\right)^m [\beta' \int_0^p \cos^m 2\eta d\eta - 2\alpha'' \int_0^p \cos^{m+1} 2\eta d\eta]. \quad (\text{A23})$$

La integral en cuestión se reduce a integrales de potencias pares e impares del coseno:

$$\begin{aligned} & \int_0^p \cos^m 2\eta d\eta \\ &= \frac{\cos^{m-1} 2\eta \sin 2\eta}{2m} + \frac{m-1}{m} \int_0^p \cos^{m-2} 2\eta d\eta, \end{aligned} \quad (\text{A24})$$

con lo que se obtendría —en principio— el diagrama de estabilidad. En la aproximación a primer orden en la serie de potencias se genera la ecuación de Mathieu y los órdenes superiores corrigen el diagrama de estabilidad. Sin embargo, para oscilaciones arbitrarias los órdenes superiores de la serie no se pueden despreciar. Se debe pues resolver analíticamente tal integral. Si esto no es factible entonces el método de segmentar la función continua es la mejor forma para calcular de manera aproximada el diagrama de estabilidad. En la Fig. A3 se compara el diagrama de Strutt exacto con el obtenido en Sanjinés (2005).

### B. ECUACIÓN RADIAL

En este apéndice veremos el tratamiento analítico para algunos casos particulares de ecuaciones radiales. La ecuación (6) se puede re-escribir para obtener una aproximación de  $\dot{\phi}$ :

$$\frac{r\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} + 2\dot{r} + \frac{g \sin \phi}{\dot{\phi}} = 0; \quad (\text{B1})$$

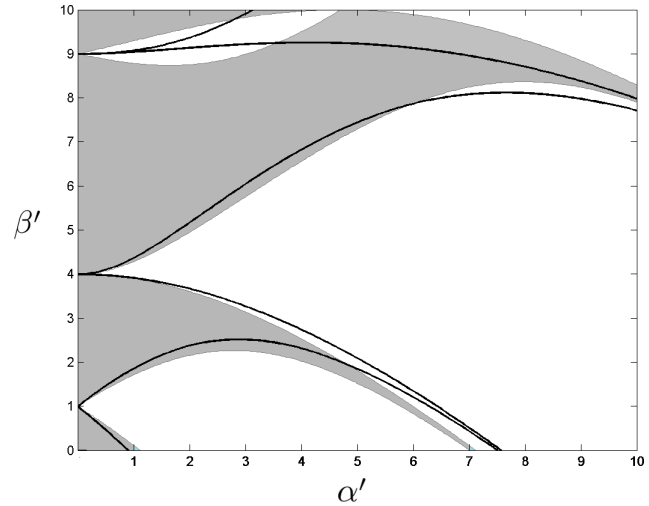


FIG. A4.— Diagrama de Strutt (borde negro) y la aproximación encontrada en este apéndice (región oscura) en la misma escala.  $Q(\tau)$  se segmentó en 4 partes.

dividiendo entre  $r$ , aplicando la derivada del logaritmo e integrando se obtiene:

$$\dot{\phi}(t)r^2(t) = \exp\left(-\int_0^t \frac{g \sin \phi(t')}{r(t')\dot{\phi}(t')} dt'\right). \quad (\text{B2})$$

Si se conserva sólo el primer término del desarrollo en serie de la exponencial se obtiene:

$$\dot{\phi}(t) \simeq \frac{1}{r^2(t)}. \quad (\text{B3})$$

Esta aproximación es razonable cuando la anterior integral tiene un valor pequeño, lo que puede ocurrir si  $\phi \simeq 0$  es muy pequeño con respecto al producto en el denominador  $r\dot{\phi}$ . A partir de (7) consideremos la ecuación:

$$\ddot{r} - \tilde{\delta}r\dot{\phi}^2 + \frac{k}{m}(r - r_0) - g \cos \phi = 0, \quad (\text{B4})$$

donde el caso de  $\tilde{\delta} = 0$  y  $\phi \simeq 0$  corresponde a la propuesta para  $r(t)$  en (15) que se usa en este trabajo. Sustituyendo (B3) en (B4) se tiene que:

$$\ddot{r} - \frac{\tilde{\delta}}{r^3} + \frac{k}{m}(r - r_0) - g \cos \phi = 0; \quad (\text{B5})$$

ya que  $\cos \phi \simeq 1$  para ángulos pequeños, se obtiene una ecuación para  $r$ :

$$\int \dot{r} dr = \int \left[ \frac{\tilde{\delta}}{r^3} - \frac{k}{m}(r - r_0) + g \right] dr. \quad (\text{B6})$$

Integrando:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{-\frac{\tilde{\delta}}{r^2} - \frac{k}{m}r^2 + 2\frac{k}{m}r_0r + 2gr + 2\tilde{c}}, \quad (\text{B7})$$

( $\tilde{c}$  es la constante de integración) y volviendo a integrar:

$$\int dt = \int \frac{r dr}{\sqrt{2(g + \frac{k}{m}r_0)r^3 + 2\tilde{c}r^2 - \frac{k}{m}r^4 - \tilde{\delta}}}, \quad (\text{B8})$$

que es una integral abeliana (que hasta donde conocemos no es soluble). Si  $\tilde{\delta} = 0$  se recupera la propuesta para  $r(t)$  en este trabajo.

El paso de (B2) a (B3) es quizá poco natural, pues sólo se considera el primer término del desarrollo del exponencial, no obstante podemos encontrar una ecuación radial con la única condición de  $\phi \simeq 0$ . Para tal objeto reordenemos (7):

$$r\dot{\phi}^2 = \ddot{r} + \frac{k}{m}(r - r_0) - g \cos \phi; \quad (\text{B9})$$

reemplazando esta ecuación en la ecuación de la energía (3) se obtiene:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r[\ddot{r} + \frac{k}{m}(r - r_0) - g \cos \phi]) + \frac{k}{2}(r - r_0)^2 - mgr \cos \phi. \quad (\text{B10})$$

Aproximando la anterior ecuación para pequeños ángulos y estableciendo  $\mathcal{E} = 2E/m - kr_0^2/m$ , (B10) queda como :

$$\dot{r}^2 + r\ddot{r} + 2\omega^2 r^2 - 3\omega^2 \rho r - \mathcal{E} = 0, \quad (\text{B11})$$

que es una ecuación de  $r$  con una solución analítica en el límite de pequeños ángulos dada por (15). Tratando (3) y (7) de manera similar se obtiene:

$$\dot{r}^2 - 2r\ddot{r} - \omega^2 r^2 + 3r^2\dot{\phi}^2 - \mathcal{E} = 0. \quad (\text{B12})$$

Esta ecuación es general pues no se ha supuesto ángulos pequeños. Si se supone que  $\dot{\phi}$  esta dada por (B3) se obtiene una ecuación para  $r$  que no es soluble:

$$\dot{r}^2 - 2r\ddot{r} - \omega^2 r^2 + \frac{3}{r^2} - \mathcal{E} = 0. \quad (\text{B13})$$

De las ecuaciones presentadas en esta sección sólo (B8) es soluble cuando  $\tilde{\delta} = 0$ . Es probable que la solución radial deba expresarse por una generalización de la integral elíptica tal como una integral abeliana (Barker 2010), sin embargo para el caso general de oscilaciones arbitrarias (amplitudes y ángulos arbitrarios) una solución analítica parece no existir por la monodromía del sistema Hamiltoniano en consideración (Fitch 2009).

### C. CAOS EN EL PÉNDULO ELÁSTICO

El estudio del caos en el péndulo elástico ha sido ampliamente tratado (ver, por ejemplo, Van Der Weele & De Kleine (1996); Núñez-Yépez *et al.* (1990); Carretero-González *et al.* (1994); Anurag *et al.* (2019)) en vista de la cuestión natural de saber si en el régimen de resonancia paramétrica (inestabilidad) determinado por  $\beta = (\pi/2)^2 \cong 2.4674$  (línea segmentada de la Fig. 3) alguna perturbación caótica inicial se puede amplificar de la misma forma en que en dicho régimen el pequeño ángulo inicial  $\phi(0) = 0.017$  rad se amplifica hasta alcanzar valores significativos (Fig. 4). Dichos estudios

reportan el fenómeno de transición orden-caos-orden como función de parámetros físicos fácilmente controlables, como por ejemplo, la energía total del sistema. En un contexto más general, el estudio del caos en el péndulo elástico está expuesto detalladamente en el trabajo de Lynch (2002), donde se invoca el teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) y su relación con las condiciones iniciales lineal y no-lineal, aunque dicho estudio está restringido a pequeñas oscilaciones. Recordemos que en nuestro trabajo estudiamos las regiones de estabilidad sin invocar la aproximación de pequeñas oscilaciones.

Las cantidades  $\alpha$  y  $\beta$  definidas en (24) son adecuadas para caracterizar la transición orden-caos-orden pues  $\alpha$  comprende la elongación (o compresión) inicial  $a = r_0 - r(0) + mg/k$  que se le da al péndulo en el modo radial, mientras que  $\beta$  comprende a los parámetros propios del resorte (masa, constante elástica, longitud del resorte relajado). Así, combinando (3) y (24), la energía total  $E$  se puede expresar por

$$E(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}kr_0^2 \left[ \frac{\beta^2 + \alpha^2 - 2\beta\pi^2}{(\pi^2 - \beta)^2} \right], \quad (\text{C1})$$

que, en el caso de la condición de resonancia paramétrica, se reduce a

$$E(\alpha) = \frac{1}{2}kr_0^2 \left( \frac{16\alpha^2 - 7\pi^4}{9\pi^4} \right). \quad (\text{C2})$$

Podemos ver que  $E(\alpha, \beta)$  es una función monótona creciente de  $\alpha$ , por lo que se espera la transición orden-caos-orden a medida que aumenta el valor de  $\alpha$  sobre la línea segmentada de la Fig. 3, de manera consistente con lo reportado por los autores citados en este apéndice, en particular, por Núñez-Yépez *et al.* (1990). Aunque nuestro propósito original no es investigar el caos, las simulaciones que hicimos de  $r(t)$  y  $\phi(t)$  para diferentes valores de  $\alpha$  en el régimen de resonancia paramétrica sugieren la transición referida entre el orden y el caos (estas simulaciones no se muestran en nuestro trabajo); para efectos de caracterizar dichos estados de orden y caos sólo acudimos a una inspección visual de los gráficos  $r(t)$  y  $\phi(t)$  de la Fig. 4. Por otra parte, los casos (a), (b) y (g) de la Fig. 4 corresponden a un resorte con  $\beta = 2.47$  que es un valor apenas mayor que el del régimen de resonancia paramétrica. En este caso podemos inferir que ocurre una transición orden-caos para algún valor de  $\alpha$  entre los valores correspondientes a los casos (a) y (b); no sabemos si ocurre una transición caos-orden para algún valor de  $\alpha$  mayor al que corresponde al caso (g). Otra observación interesante de las simulaciones de la Fig. 4 es la de estados aparentemente caóticos (al menos para  $\phi(t)$ ) en los casos (c) y (d) que corresponden al régimen de estabilidad, lo que sugiere que el estado de caos no solamente estaría asociado al régimen de resonancia paramétrica. Estos aspectos, y

seguramente otros, son posibles temas de futuras investigaciones.

## REFERENCIAS

- Anurag, B. M., Bhattacharjee, J. K. & Chakraborty, S. (2019), *Physica D* (em prensa).
- Barker, A. L. (2010), *Elliptic Functions, An Elementary Text-Book for Students of Mathematics*, (Cornell University Library).
- Carretero-González, R., Núñez-Yépez, H. N. & Salas-Brito, A. L. (1994), *Eur. J. Phys.* **15**, 139.
- Fitch, N. J. (2009), *Phys. Rev. Lett.* **103**, 034301.
- Goldstein, H. (1980), *Classical Mechanics*, (2nd ed., Addison-Wesley).
- Lynch, P. (1996), *Journal of Non-Linear Mechanics* **37**, 345.
- Lynch, P. (2002), *The Swinging Spring, A model for Atmospheric Balance*, (Cambridge University Press: Large Scale Atmospheric-Ocean Dynamics, Vol II).
- Magnus, W. & Winkler, S. (1966), *Hill's Equation*, (Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, Vol. 20, Wiley).
- Núñez-Yépez, H. N., Salas-Brito, A. L., Vargas, C. A. & Vicente, L. (1990), *Phys. Lett. A* **145**, 101.
- Olsson, M. G. (1976), *Am. J. Phys.* **45**, 1211.
- Sanjinés, D. (1990), *Rev. Bol. Fís.* **36** (S1), 181.
- Sanjinés, D. (2002), *Rev. Bol. Fís.* **8**, 1.
- Sanjinés, D. (2005), *Rev. Bol. Fís.* **11**, 31.
- Van Der Weele, J. P. & De Kleine, E. (1996), *Physica A* **228**, 245.
- Vitt, A. & Gorelik, G. (1971), *Z. Tekh. Fiz.* **3**, 294.