

## SINCRONIZACIÓN DE TRÍOS DE NEURONAS DE RULKOV CARACTERIZADAS POR PERIODICIDADES

### PERIODICITY CHARACTERIZED SYNCHRONIZATION OF A TRIO OF RULKOV NEURONS

KEVIN IGLESIAS\* & GONZALO MARCELO RAMÍREZ-ÁVILA\*\*

Instituto de Investigaciones Físicas, Universidad Mayor de San Andrés  
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8635  
La Paz-Bolivia

(Recibido 2 de julio de 2019; aceptado 10 de agosto de 2019)

#### RESUMEN

Se estudia la sincronización en función a la intensidad de acoplamiento de tríos de neuronas de Rulkov caracterizadas por periodicidades y eléctricamente acopladas bidireccionalmente. Primeramente, se determinó el comportamiento dinámico de una neurona de Rulkov caracterizándolo mediante periodicidades en el plano de parámetros; donde se tiene regiones en las que se producen ráfagas de picos típicas de estos sistemas. Se obtuvieron cuencas de atracción del modelo de Rulkov, para las cuales se observó multiestabilidad. Se trabajó tanto con neuronas idénticas como diferentes pero con la misma periodicidad. Se encontró que la configuración heterogénea facilita la sincronización, lo cual se comprobó mediante el análisis de las series temporales de la variable lenta.

Código(s) PACS: 05.45.-a–87.19.1l–05.45.Xt

*Descriptor:* Dinámica no lineal y caos – Modelos neuronales – Sincronización; osciladores acoplados

#### ABSTRACT

We studied synchronization as a function of coupling strength in a trio of Rulkov neurons characterised by their periodicities, and considering electrically and bidirectional coupling. Firstly, we determined the dynamical behavior of a single neuron by using its periodicities in the parameter plane. We identified the typical behavior of spiking-bursting in several regions of this plane. Several basins of attraction for the Rulkov model were obtained exhibiting multistability. We worked with identical and different neurons but with the same periodicity. We found that the heterogeneous configuration enhances synchronization an aspect that was verified by analyzing the time series of the slow variable.

*Subject headings:* Nonlinear dynamics and chaos – Neuron models – Synchronization; coupled oscillators

#### 1. INTRODUCCIÓN

El estudio de muchos sistemas dinámicos conduce a ecuaciones diferenciales y/o mapas (sistemas discretos), que generalmente presentan un comportamiento no lineal y no poseen solución analítica. El área que trata dichos sistemas es la *dinámica no lineal*, estudiada ampliamente (ver por ejemplo los cursos introductorios de Strogatz (1994) y Nicolis (1995)). Para el estudio de sistemas no lineales, usualmente se recurre a un análisis de estabilidad lineal complementado por otro de bifurcación. La solución de este tipo de sistemas, generalmente es obtenida de manera numérica.

La *neurociencia* es el estudio de cómo se desarrolla el sistema nervioso, su estructura y su funcionalidad, como lo señala Wickens (1995). La parte más importante del sistema nervioso es el cerebro; en particular, el cerebro humano es uno de los sistemas más difíciles de analizar, debido a la gran cantidad de constituyentes (neuronas) que según Longstaff (2011) tiene un estimado de  $8.6 \times 10^{10}$  neuronas y cada una de ellas con aproximadamente  $10^4$  conexiones.

Para utilizar las ideas de la dinámica no lineal en neurobiología, se presenta al sistema nervioso como un sistema de entrada/salida de información; es decir, el sistema nervioso interactúa con su entorno mediante ráfagas de picos para transportar la información a través de circuitos neuronales como lo

\*kcordova@fiumsa.edu.bo

\*\*<http://www.fiumsa.edu.bo/docentes/mramirez/>

muestran Abarbanel & Rabinovich (2001). La información es procesada y distribuida para producir una respuesta relacionada a una actividad funcional específica del cerebro. Desde el punto de vista fisiológico, el papel principal lo tiene la membrana lipídica, donde se tienen cambios abruptos de potencial, lo cual genera una ráfaga de picos eléctricos o potenciales de acción que son transportados por el axón; siendo este comportamiento explicado por Izhikevich (2007).

El estudio de la interacción de neuronas en una red ha dado lugar al surgimiento de nuevas disciplinas, como por ejemplo, la *neurociencia computacional* que incluye técnicas matemáticas sofisticadas para resolver ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos en general, como lo hacen Borisjuk *et al.* (2005).

Existen distintos tipos de neurona con sus respectivos modelos. A grandes rasgos, Abarbanel *et al.* (1999) definen a la neurona como un sistema que no está en equilibrio y que además posee varios mecanismos de retroalimentación y retardo; los cuales, proporcionan a la neurona un carácter oscilatorio. El primer modelo de neurona fue propuesto por Hodgkin & Huxley (1952) después de realizar una serie de trabajos experimentales con neuronas de calamar gigante; en tanto que Lamberti & Rodríguez (2007) proporcionan una deducción matemática de dicho modelo.

Posteriormente, se postularon diversos modelos neuronales más simples con la característica principal de ser descritos por ecuaciones diferenciales no lineales, por lo que, obtener una solución analítica es muy difícil. Es así que se recurre al cálculo numérico.

En este trabajo se muestra el estudio de la sincronización para las dos posibles configuraciones de tríos de neuronas de Rulkov tanto diferentes como idénticas en sus parámetros intrínsecos, caracterizando a cada neurona por su periodicidad. En la Sec. 2 se explica el modelo utilizado y se caracteriza al mismo por sus periodicidades; en tanto que los detalles de la sincronización para los sistemas mencionados se dan en la Sec. 3. Los resultados que conducen a la determinación de multiestabilidad y a la descripción de la sincronización a través del error medio se exponen en la Sec. 4. Finalmente, se dan las conclusiones y perspectivas de este trabajo.

## 2. MODELO DE NEURONA DE RULKOV

Una versión simplificada de modelo de neurona es planteada por Rulkov (2001), cuya formulación consiste en dos ecuaciones en diferencias, lo que es conocido como *mapa de Rulkov*. Por lo tanto, se tienen dos variables dinámicas acopladas que reproducen los comportamientos neuronales más importantes como ser: oscilaciones sostenidas, situaciones de estacionariedad (punto fijo) y ráfagas de picos o “*bursts of spikes*” seguidos por episodios de estacionariedad o silencio. Las ecuaciones del modelo son:

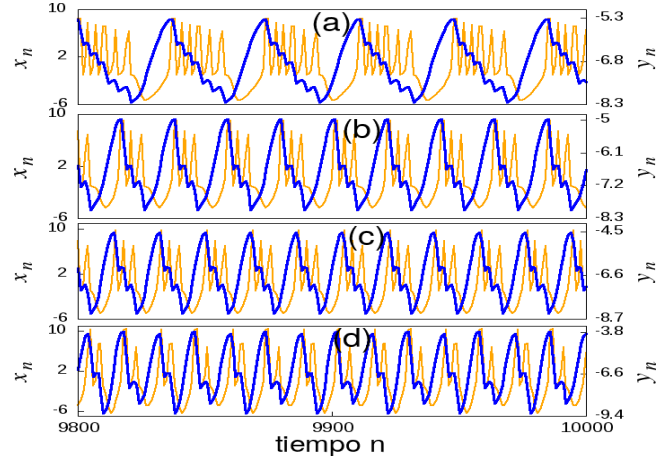


FIG. 1.— (Color online) Series temporales de las variables dinámicas rápida  $x$  (naranja) y lenta  $y$  (azul), obtenidas numéricamente para  $n = 10000$ , con las condiciones iniciales  $x_0 = 0.02800, y_0 = -0.05201$ , usando distintos valores para el parámetro  $\mu$ : (a) 0.05, (b) 0.10, (c) 0.15, (d) 0.20.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n + \beta_n) \\ y_{n+1} &= y_n - \mu(x_n + 1) + \mu\sigma, \end{aligned} \quad (1)$$

donde

$$f(x_n, y_n) = \begin{cases} \alpha/(1 - x_n) + y_n, & \text{si } x_n \leq 0, \\ \alpha + y_n, & \text{si } 0 < x_n < \alpha + y_n, \\ -1, & \text{si } x_n \geq \alpha + y_n. \end{cases} \quad (2)$$

Siendo  $x$  y  $y$  las variables dinámicas rápida y lenta respectivamente. Los parámetros  $\mu, \alpha$  y  $\sigma$  están asociados a las características biológicas del sistema.

Profundizando el significado de los parámetros relacionados a aspectos biológicos, Ibarz *et al.* (2011) señalan lo siguiente: el parámetro  $\alpha$  cumple la función de identificar el voltaje de reinicialización relativo a las ramas estables e inestables de la nulclina rápida,  $\sigma$  desplaza la nulclina lenta de manera vertical en el plano de fases.

Ramírez-Ávila *et al.* (2015) realizaron un estudio detallado del modelo de Rulkov en relación al parámetro de actividad neuronal  $\mu$ , en el cual se indica que dicho parámetro debe tener valores positivos pequeños ( $\mu < 1$ ) para que se pueda reproducir el comportamiento neuronal regular. Por ejemplo, en la Fig. 1, se muestra la variación en el comportamiento de las ráfagas de picos en función del parámetro  $\mu$ .

En este trabajo, el parámetro de actividad neuronal se mantuvo fijo  $\mu = 0.1$ , debido a que Ramírez-Ávila *et al.* (2015) muestran que este valor está asociado a valores de periodicidad pequeños de un comportamiento regular en la variable rápida  $x$ .

### 2.1. Caracterización del modelo de Rulkov

Para la caracterización del mapa de Rulkov, Ramírez-Ávila & Gallas (2011) proponen el cálculo de *periodicidades* como método alternativo al diagrama de bifurcación y al cálculo de exponentes de

Lyapunov.

La periodicidad se define como el número de pasos (tiempo)  $n$  que transcurren hasta que la variable dinámica alcance exactamente el mismo valor, lo que permite visualizar en el espacio de parámetros, estructuras regulares como por ejemplo regiones similares a patrones de troncos de palmera, llegando a tener una descripción más detallada de los regímenes oscilatorios.

Cabe resaltar que en el modelo de Rulkov, Ramírez-Ávila *et al.* (2015) indican que los valores de la periodicidad en la variable rápida  $x$  y la variable lenta  $y$  son generalmente equivalentes; por lo tanto, en este trabajo se calcula la periodicidad de la variable lenta  $y$  por tener una forma similar a una oscilación de relajación como lo muestra la Fig. 1. Además, se utilizó el plano de parámetros obtenido por Ramírez-Ávila *et al.* (2015), para un valor de  $\mu = 0.1$ , como se muestra en la Fig. 2.

Pisarchik & Feudel (2014) señalan que el análisis de multiestabilidad de un sistema dinámico es muy importante debido a la coexistencia de varios estados estables iniciales posibles para un conjunto de parámetros dados, donde el sistema depende crucialmente de las condiciones iniciales. Las condiciones iniciales que dan lugar a diferentes trayectorias que pueden converger a un atractor o no, se denomina *cuenca de atracción*.

El fenómeno de la multiestabilidad está presente casi en todas las áreas de la ciencia; la primera vez que se utilizó el término *multiestabilidad* fue en el estudio de la percepción visual de Atteneave (1971) donde se analiza un problema de perspectiva visual. En Biología, se tienen varios mecanismos y estructuras topológicas que conducen a la multiestabilidad; siendo la base para explicar fenómenos oscilatorios periódicos según lo señalan Ullner *et al.* (2007). En hidrodinámica, Ravelet *et al.* (2004) reportan la presencia de multiestabilidad asociada a la turbulencia de fluidos, a bajos y altos números de Reynolds. En óptica, se tiene el fenómeno de la *multiestabilidad espacial* observado en un láser, donde se encuentran patrones espaciales debido a la interacción de los modos de cavidad como lo muestran Brambilla *et al.* (1991). En reacciones químicas, Ganapathisubramanian & Showalter (1984) trabajaron con base en la biestabilidad de varias reacciones de oxidación. En el análisis de ecosistemas, Huisman & Weissing (2001) dan un enfoque desde la dinámica no lineal mostrando que la coexistencia de diversas especies puede ser caracterizada por cuencas de atracción de geometría fractal, donde una pequeña perturbación produce un cambio en la biodiversidad del sistema; por lo tanto, una transición a otro estado estable.

En *dinámica neuronal*, la multiestabilidad se presenta como mecanismo básico para explicar el contenido asociativo de almacenamiento direccionable y el reconocimiento de patrones, tanto en sistemas neuronales artificiales como los descritos por Hertz *et al.* (1991) y naturales estudiados por Canavier *et al.* (1993). A nivel de una sola neurona, la multi-

estabilidad indica la coexistencia de varios patrones de disparo de ráfagas de picos (*bursting*), ya sean regulares o caóticos como lo reportan Braun & Mattia (2010), lo que constituye un aspecto interesante de este trabajo.

Para redes neuronales, Newman & Butera (2010) muestran que la multiestabilidad y particularmente la *biestabilidad*, juega un papel importante para explicar la señal celular y las interacciones neuronales, donde la llegada de un potencial de acción activa mecanismos excitatorios e inhibitorios a través de neurotransmisores.

### 3. SINCRONIZACIÓN

La sincronización es un fenómeno emergente debido a la interacción de osciladores que constituyen un sistema complejo. Puede surgir abruptamente en redes complejas biológicas según se muestra en Boccaletti *et al.* (2016), donde los sistemas vivos tienden a ajustar sus ritmos en función a una interacción existente como lo señalan Manrubia *et al.* (2004). De acuerdo con Ramírez-Ávila (2007), se pueden distinguir diferentes tipos de sincronización, como por ejemplo: completa, generalizada, en fase, con retardo, con retardo intermitente y casi sincronización.

Para el estudio de la sincronización en neuronas modeladas por el mapa de Rulkov, Calderón de la Barca & Ramírez-Ávila (2017) usaron como indicadores de sincronización dos cantidades que involucran a la variable rápida  $x$  y a la variable lenta  $y$ . (i) El *error medio de sincronización*  $\langle \varepsilon \rangle$  que se define como la distancia euclidiana promedio a la variedad de sincronización; por lo tanto, este valor debe tender a cero en las diferencias de las variables de cada oscilador para cada tiempo  $n$  en el caso de sincronización completa. Para dos neuronas de Rulkov acopladas se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{n - n_\tau} \sum_{i=n_\tau}^n \sqrt{(x_i^{(2)} - x_i^{(1)})^2 + (y_i^{(2)} - y_i^{(1)})^2}, \quad (3)$$

donde  $n_\tau$  es un transitorio. (ii) El *error máximo*, que es el valor máximo de las distancias euclidianas para los  $n - n_\tau$  valores, es decir:

$$\varepsilon_{\max} = \max \left\{ \sqrt{(x_i^{(2)} - x_i^{(1)})^2 + (y_i^{(2)} - y_i^{(1)})^2} \right\}, \quad (4)$$

con  $i = n_\tau, \dots, n$ .

#### 3.1. Acoplamiento

Para modelar la interacción sináptica entre dos neuronas  $i - j$ , Girardi-Schappo *et al.* (2018) utilizan un acoplamiento eléctrico de carácter bidireccional y simétrico, expresado por:

$$\beta_n^{(i)} = \beta^e g_{ij} (x_n^{(j)} - x_n^{(i)}), \quad (5)$$

siendo  $n$  el tiempo,  $\beta^e$  una constante,  $g_{ij}$  los elementos de una matriz simétrica y de diagonal nula que define la conexión entre neuronas.

En la Fig. 3 se ve que tanto para neuronas idénticas y no idénticas, las regiones de sincronización completa son bastante extendidas.

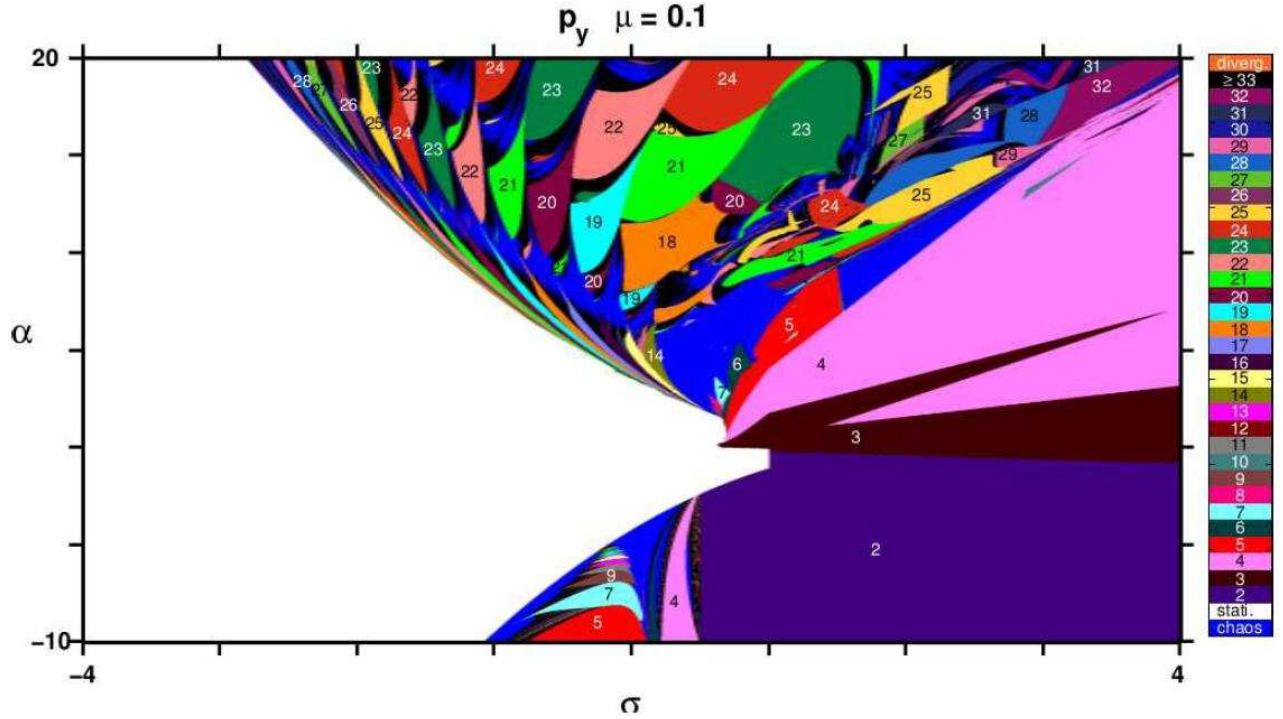


FIG. 2.— (Color online) Espacio de parámetros del modelo de Rulkov  $\alpha$  vs.  $\sigma$  caracterizado por la periodicidad en la variable  $y$  ( $p_y$ ) y con  $\mu = 0.1$ , donde se especifican los valores de periodicidad dentro de algunas zonas mediante el índice de colores. Las regiones blanca, negra y azul corresponden a punto fijo, oscilaciones de alta periodicidad ( $p_y \geq 33$ ) y caos respectivamente. La región de estudio considerada en este trabajo corresponde a una de periodicidad 21. Figura tomada de Ramírez-Ávila *et al.* (2015).

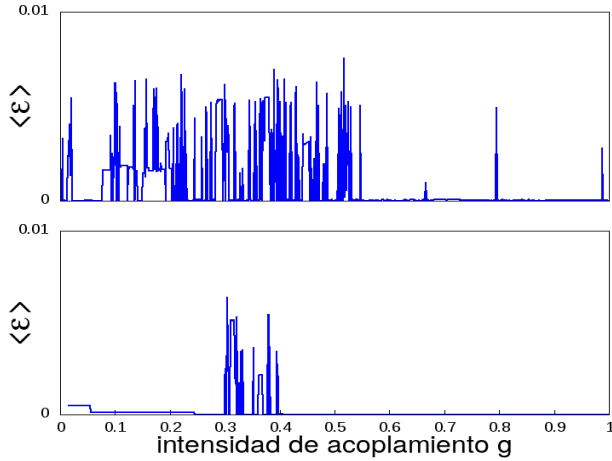


FIG. 3.— Comportamiento del error medio en función de la intensidad de acoplamiento  $g$  para dos neuronas de Rulkov con  $\mu = 0.1$  y periodicidad 21: con parámetros  $(\alpha, \sigma) = (14.0, 1.25)$  y  $(\alpha, \sigma) = (14.0, 1.22)$  para las neuronas no idénticas representadas en la parte superior y  $(\alpha, \sigma) = (13.9, 1.21)$  para las neuronas idénticas representadas en la parte inferior.

### 3.2. Heterogeneidad

Estrada (2010) define la *heterogeneidad* de una red compleja en términos de la topología de la misma; con base en las distintas distribuciones de conexiones que se puede tener entre los nodos de la red. Cuando el número de nodos es pequeño cada estructura de red recibe el nombre de *motivo*. En nuestro caso, tenemos dos motivos (ver Fig. 4) para los cuales se estudiará la sincronización.

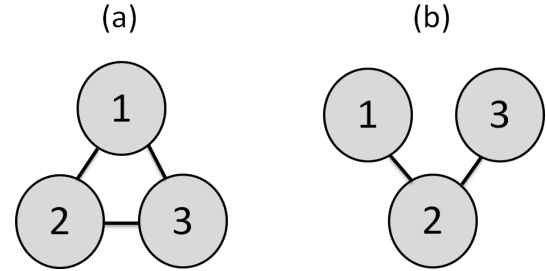


FIG. 4.— Motivos de acoplamiento bidireccional para tres neuronas. Con motivos: (a) homogéneo con acoplamiento global y (b) heterogéneo donde se tiene un acoplamiento en forma de **V**.

## 4. RESULTADOS

### 4.1. Multiestabilidad

Las cuencas de atracción de la Fig. 5 muestran la biestabilidad y la triestabilidad de la neurona de Rulkov, además de una discontinuidad para el valor  $x_0 = 0.25$ . Para analizar y confirmar la existencia de dicha discontinuidad se recurre a la obtención de series temporales para condiciones iniciales en la vecindad de la misma, mostrándose en la Fig. 6 el caso de la cuenca superior de la Fig. 5. La triestabilidad observada en la cuenca inferior de la Fig. 5 se ilustra también mediante series temporales representadas en la Fig. 7.

La Tabla 1 muestra que para los experimentos numéricos se tomó un conjunto de tres neuronas que comparten la misma periodicidad ( $p_y = 21$ ); es decir, se encuentran en la misma región de periodicidad en la Fig. 2.

Para el estudio de sincronización de los motivos mostrados en la Fig. 4; primero se tomó en cuenta un

**TABLA 1**  
 TRÍO DE NEURONAS SELECCIONADO PARA LOS EXPERIMENTOS NUMÉRICOS, MOSTRANDO BIESTABILIDAD RESPECTO A SU CONDICIÓN INICIAL.

Neurona	$\alpha$	$\sigma$	Periodicidad	$(x_0, y_0)$
1	14.0	1.25	21	$(-0.03, 0.05)$
			46	$(-0.01, -0.03)$
2	14.0	1.22	21	$(-0.04, -0.01)$
			23	$(-0.06, -0.06)$
3	13.9	1.21	21	$(-0.06, -0.04)$
			23	$(0.06, -0.02)$

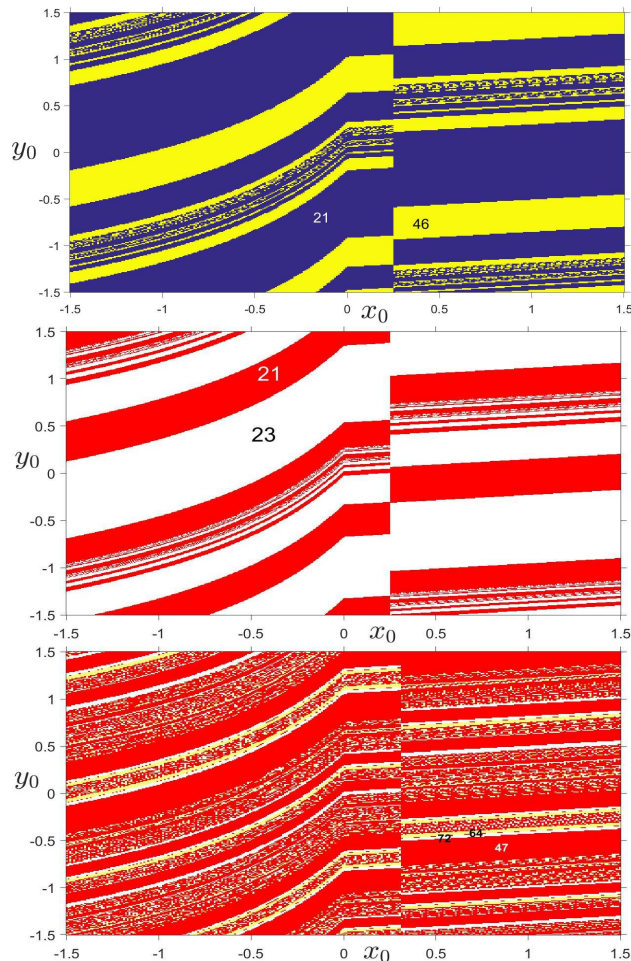


FIG. 5.— (Color online) Cuencas de atracción para el modelo de neurona de Rulkov con  $\mu = 0.1$ , donde se tiene periodicidades coexistentes  $p_y : 21, 46$ ,  $p_y : 21, 23$  y  $p_y : 72, 64, 47$ , con los parámetros  $(\alpha, \sigma) = (14.0, 1.25)$  en la cuenca superior,  $(\alpha, \sigma) = (14.1, 1.25)$  en la cuenca media y  $(\alpha, \sigma) = (13.6, 1.31)$  en la cuenca inferior, teniendo como condiciones iniciales los intervalos  $x_0 \in [-1.5, 1.5]$  y  $y_0 \in [-1.5, 1.5]$ . En las cuencas obtenidas la discontinuidad se presenta para  $x_0 = \sigma - 1$ .

trío de neuronas diferentes en los parámetros según la Tabla 1; sin embargo, tenían la misma periodicidad

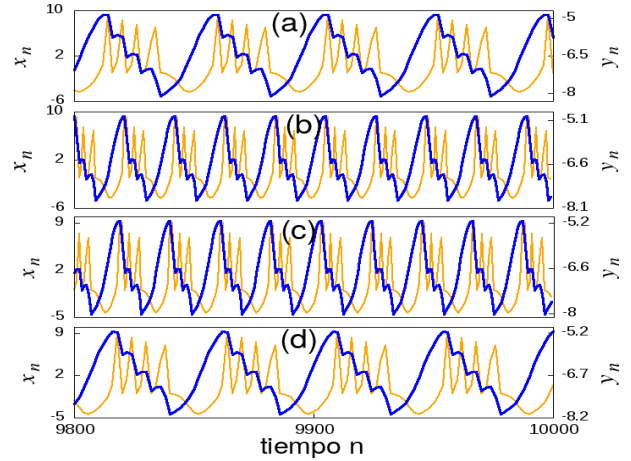


FIG. 6.— (Color online) Series temporales para condiciones iniciales  $(x_0, y_0)$  cercanas a la discontinuidad de la primera cuenca de atracción mostrada en la Fig. 5, con su respectiva periodicidad, (a)  $(0.2458, -0.7470)$ ;  $p_y = 46$ , (b)  $(0.2559, -0.7470)$ ;  $p_y = 21$ , (c)  $(0.2458, -0.1555)$ ;  $p_y = 21$ , (d)  $(0.2559, -0.1555)$ ;  $p_y = 46$ .

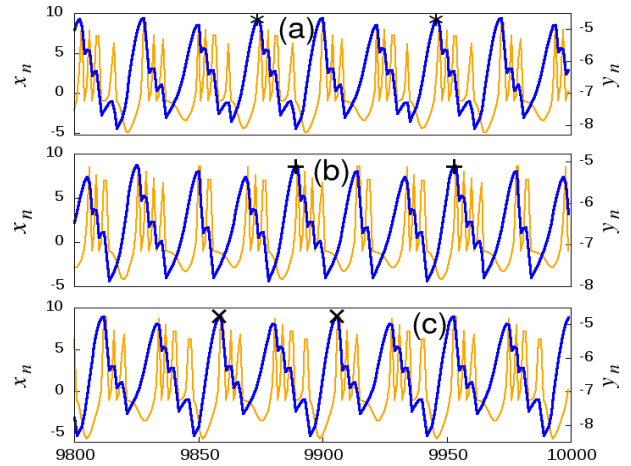


FIG. 7.— (Color online) Series temporales para condiciones iniciales  $(x_0, y_0)$  tomadas de la cuenca inferior de la Fig. 5 con su respectiva periodicidad  $p_y$  (a)  $(0.286, 1.099)$ ;  $p_y = 72$ , (b)  $(0.2759, 1.149)$ ;  $p_y = 64$ , (c)  $(0.2759, 1.059)$ ;  $p_y = 47$  las marcas en los picos de la variable lenta  $y_n$  (azul) indican los valores que se tomaron en cuenta para el cálculo de periodicidades.

dad  $p_y = 21$ . Luego se consideró un trío de neuronas idénticas (caso 1) de la Tabla 1.

#### 4.2. Trío de neuronas no idénticas

Motivo (a) de la Fig. 4.

En la Fig. 8 se puede ver que para un valor de la intensidad de acoplamiento en la vecindad de  $g = 0.04$ , el error medio de sincronización  $\langle \varepsilon \rangle$  tiende a ser nulo; por lo tanto, en la Fig. 9 se verifica si este valor de  $g$  lleva al sistema a la sincronización recurriendo a las series temporales de las variables lentas  $y$  de cada neurona.

Motivo (b) de la Fig. 4.

Como se puede ver en la Fig. 10, para valores pequeños de  $g$  y en la vecindad de  $g = 0.36$  se tiene que el error medio de sincronización  $\langle \varepsilon \rangle$  tiende a ser nulo. Así, en la Fig. 11 se verifica que para un valor  $g$  dentro de este intervalo el sistema sincroniza, lo que

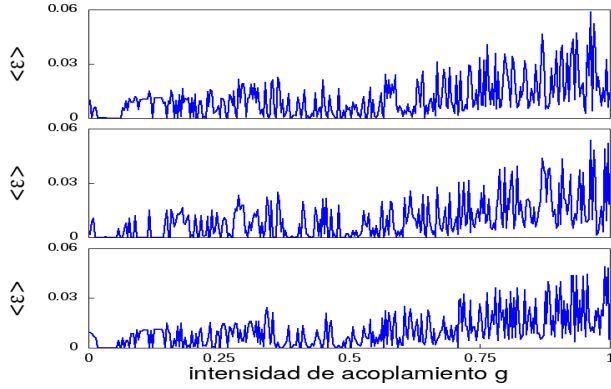


FIG. 8.— Comportamiento del error medio ( $\varepsilon$ ) en función de la intensidad de acoplamiento  $g$ , para la configuración (a) de la Fig. 4, considerando un trío de neuronas diferentes en los parámetros  $\alpha$  y  $\sigma$ , compartiendo la misma periodicidad en la variable lenta  $p_y = 21$  y según su condición inicial en la Tabla 1.

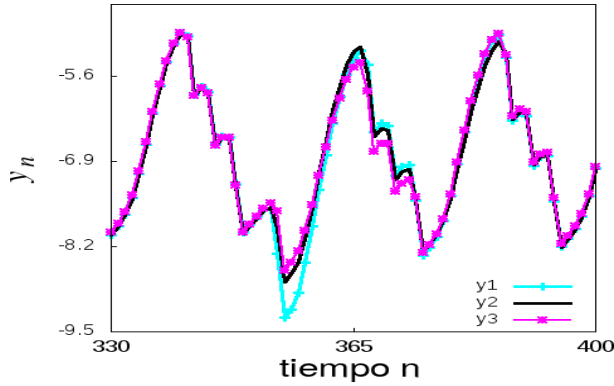


FIG. 9.— (Color online) Series temporales de las variables lentas  $y$  del motivo (a) según la Fig. 4 para un trío de neuronas no idénticas  $(\alpha_1, \sigma_1) = (14.0, 1.25)$ ,  $(\alpha_2, \sigma_2) = (14.0, 1.22)$ ,  $(\alpha_3, \sigma_3) = (13.9, 1.21)$ , con un valor de la intensidad de acoplamiento  $g = 0.04$ , observándose sincronización completa entre las neuronas 2 y 3 más no con la 1.

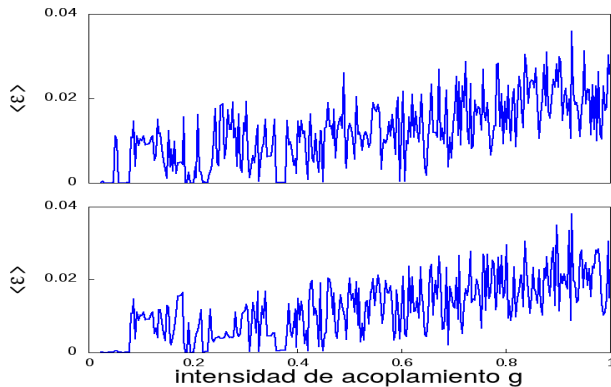


FIG. 10.— Comportamiento del error medio en función de la intensidad de acoplamiento  $g$  para la configuración (b) de la Fig. 4, considerando a un trío de neuronas diferentes en los parámetros  $\alpha$ ,  $\sigma$ , compartiendo la misma actividad  $\mu = 0.1$  y periodicidad 21 con su respectiva condición inicial según la Tabla 1.

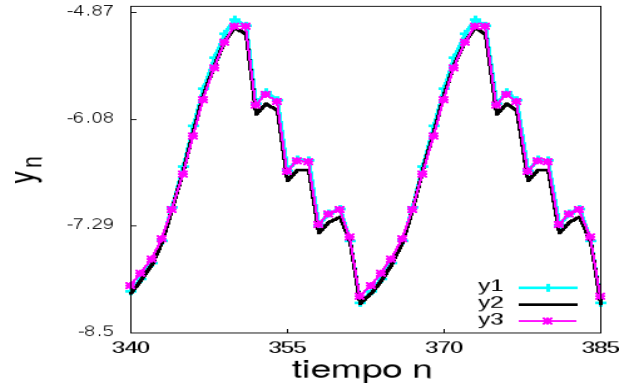


FIG. 11.— (Color online) Series temporales de las variables lentas  $y$  para la configuración (b) de la Fig. 4, para un trío de neuronas no idénticas con los mismos parámetros de la Fig. 10, un valor de la intensidad de acoplamiento  $g = 0.37$ , donde se observa sincronización en fase.

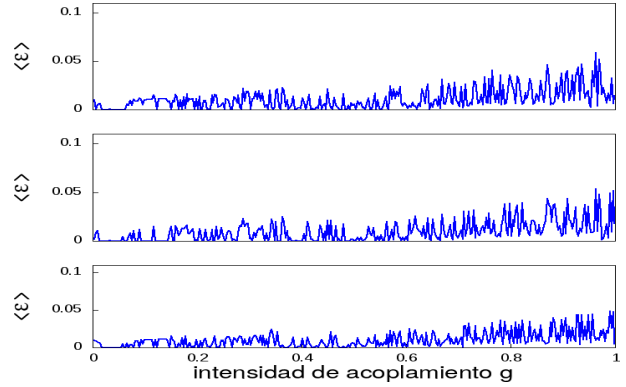


FIG. 12.— Comportamiento del error medio en función de la intensidad de acoplamiento  $g$  para la configuración (a) de la Fig. 4, considerando a un trío de neuronas idénticas en los parámetros  $\alpha$ ,  $\sigma$  y  $\mu = 0.1$ . Una periodicidad de 21 con su respectiva condición inicial según la Tabla 1, siendo la neurona 1 la seleccionada.

se muestra mediante las series temporales de las variables lentas  $y$ .

#### 4.3. Trío de neuronas idénticas

Motivo (a) de la Fig. 4.

Como se puede ver en la Fig. 12, existe un intervalo para  $g$  donde el error medio de sincronización ( $\varepsilon$ ) tiende a ser nulo; por lo tanto, en la Fig. 13 se verifica que este valor de  $g$  lleva al sistema a la sincronización como se ve en las series temporales de las variables lentas  $y$  con un valor de  $g$  específico.

Motivo (b) de la Fig. 4.

Como se puede ver en la Fig. 14 existe un intervalo grande para  $g = 0.36$  donde se tiene que el error medio de sincronización ( $\varepsilon$ ) tiende a ser nulo; por lo tanto, en la Fig. 15 se verifica que este valor de  $g$  lleva al sistema a la sincronización, lo que se muestra en las series temporales de las variables lentas  $y$  con un valor de  $g$  específico.

## 5. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Se determinó la sincronización en tríos de neuronas idénticas y no idénticas caracterizadas por sus periodicidades que pueden ser las mismas o no. Se encontró el carácter multiestable

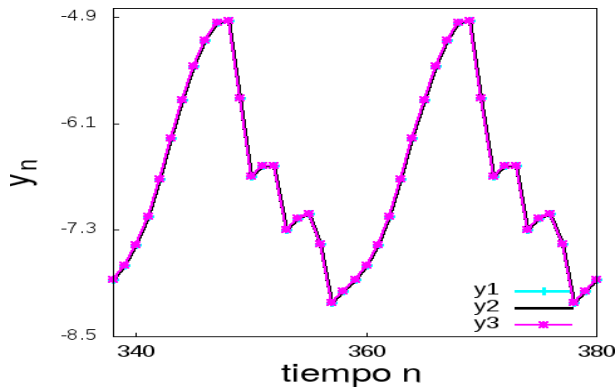


FIG. 13.— (Color online) Series temporales de las variables lentas  $y$ , para un trío de neuronas idénticas con  $(\alpha, \sigma) = (14.0, 1.25)$  con un valor de la intensidad de acoplamiento  $g = 0.04$ , donde se puede ver sincronización completa.

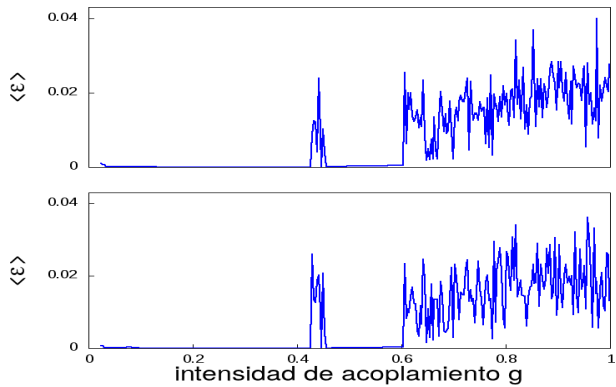


FIG. 14.— Comportamiento del error medio en función de la intensidad de acoplamiento  $g$  para la configuración (b) de la Fig. 4, considerando a un trío de neuronas iguales en los parámetros  $\alpha$ ,  $\sigma$  y  $\mu = 0.1$ . Una periodicidad de  $p_y = 21$  con su respectiva condición inicial según la Tabla 1, siendo la neurona 1 la seleccionada.

de neuronas mediante la obtención de las cuencas de atracción, encontrando una discontinuidad en  $x_0 = \sigma - 1$  verificándola mediante series temporales. Comparando los errores medios de sincronización de ambos motivos, se ve que la configuración heterogénea facilita la sincronización.

Comparando el error medio de sincronización  $\langle \varepsilon \rangle$  para motivos formados por 2 y 3 neuronas; se

tiene como impacto principal la reducción considerable del intervalo de valores de  $g$  que muestran sincronización ( $\langle \varepsilon \rangle \rightarrow 0$ ) incluso con neuronas no idénticas.

Se tiene previsto trabajar con la determinación de los tiempos de sincronización para poder responder de manera más precisa a la cuestión anterior. Se tiene también como perspectiva trabajar con motivos de 4 y 5 neuronas para determinar si la heterogeneidad de las redes subyacentes a estos motivos juega o no un rol importante en lo que concierne a la sincronización. También, sería interesante abordar el problema de la multiestabilidad para diferentes regiones en el plano de parámetros.

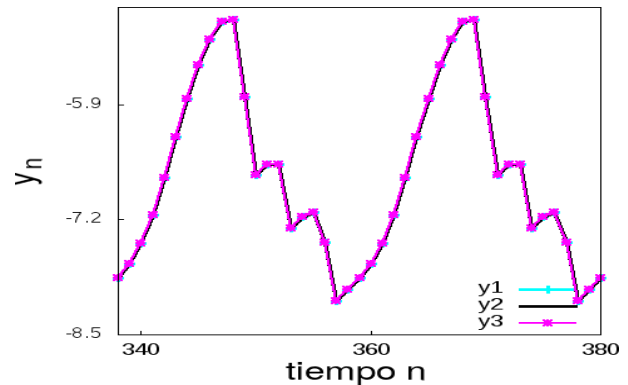


FIG. 15.— (Color online) Series temporales de las variables lentas  $y$ , para un trío de neuronas idénticas con  $(\alpha, \sigma) = (14.0, 1.25)$  con un valor de la intensidad de acoplamiento  $g = 0.23$ , donde se puede ver sincronización completa.

## AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés y al I.I.F. por las facilidades que nos brindan para realizar investigación en las mejores condiciones.

## Conflicto de intereses

Los autores declaran que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

## REFERENCIAS

- Abarbanel, H.D., Szücs, A., Varona, P., Volkovskii, A., Rabinovich, M. & Selverston, A. (1999), *Computational Neuroscience* **11**, 563.
- Abarbanel, H. D. & Rabinovich, M. (2001), *Current Opinion in Neurobiology*, **11**, 423.
- Atteneave, F. (1971), *Scientific American* **225**, 63.
- Boccaletti, S., Almendral, J.A., Guan, S., Leyva, I., Liu, Z., Sendiña-Nadal, I., Wang, Z. & Zou, Y. (2016), *Physics Reports* **660**, 1.
- Borisuyuk, A., Friedman, A., Ermentrout, B. & Terman, D. (2005), *Mathematical Neuroscience*, (Berlín: Springer- Verlag).
- Brambilla, M., Lugiato, L., Penna, V., Prati, F., Tamm, C. & Weiss, C. (1991), *Physical Reviews Letters* **43**, 5114.
- Braun, J. & Mattia, M. (2010), *NeuroImage* **52**, 740.
- Calderón de la Barca, I. & Ramírez-Ávila, G.M. (2017), *Revista Boliviana de Física* **30**, 3.
- Canavier, C., Baxter, D., Clark, J. & Byrne, J. (1993), *Journal of Neurophysiology* **69**, 2252.
- Estrada, E. (2010), *Physical Review E* **82**, 066102.
- Ganapathisubramanian, N. & Showalter, K. (1984), *The Journal of Chemistry Physics* **80**, 4177.
- Girardi-Schappo, M., Tragtenberg, M. & Kinouchi, O. (2018), *Journal of Neuroscience Methods* **220**, 116.
- Hertz, J., Krogh, A. & Palmer, R. (1991), *Introduction to the Theory of Neural Computation*, (New York, Addison-Wesley).
- Hodgkin, A.L. & Huxley, A.F. (1952), *The Journal of Physiology* **117**, 500.
- Huisman, J. & Weissing, F. (2001), *The American Naturalist* **157**, 171.
- Ibarz, B., Casado, J. & Sanjuán, M.A.F. (2011), *Physics Reports* **501**, 1.
- Izhikevich, E. (2007), *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*, (Cambridge: The MIT Press 505).
- Lamberti, W. & Rodríguez, V. (2007), *Electroneurobiología* **15**, 31.
- Longstaff, A. (2011), *Instant Notes in Neuroscience*, (New York Springer-Verlag with BIOS Scientific Publishers).

- Manrubia, S., Mikhailov, A. & Zanette, D. (2004), *Emergence of Dynamical Order: Synchronization Phenomena in Complex Systems*, **2**, (Singapur, World Scientific Printers).
- Newman, P. & Butera, R. (2010), *Chaos* **20**, 023118.
- Nicolis, G. (1995), *Introduction to nonlinear science*, (Cambridge Great Britain, Ed. Cambridge).
- Pisarchik, A. & Feudel, U. (2014), *Physics Reports* **540**, 167.
- Ramírez-Ávila, G.M. (2007), *Revista Boliviana de Educación Superior* **7**, 25.
- Ramírez-Ávila, G.M. & Gallas, J. (2011), *Revista Boliviana de Física* **19**, 1.
- Ramírez-Ávila, G.M., Gallas, M. & Gallas, J. A. (2015), *Revista Boliviana de Física* **27**, 1.
- Ravelet, F., Marié, L., Chiffaudel, A. & Daviaud, F. (2004), *Physical Review Letters* **93**, 164.
- Rulkov, N. (2001), *Physical Review Letters*. **86**, 183.
- Strogatz, S.H. (1994), *Nonlinear Dynamics and Chaos. With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*, (New York, Perseus Books).
- Ullner, E., Zaikin, A., Volkov, E. & García-Ojalvo, J. (2007), *Physical Review Letters* **99**, 148.
- Wickens, A. (1995), *A History of THE BRAIN From Stone Age surgery to modern neuroscience*, (London and New York, Psychology Press).