REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA **26**, 1–5, 2015
ISSN 1562–3823. INDEXADA EN: SCIELO, LATINDEX, PERIÓDICA

DINÁMICA ROTACIONAL RELATIVISTA

ROTATIONAL RELATIVISTIC DYNAMICS

M. L. PEÑAFIEL[†] & V. M. PEÑAFIEL[‡]
Instituto de Investigaciones Físicas, Carrera de Física
Universidad Mayor de San Andrés
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8635
La Paz - Bolivia
(*Recibido 24 de Agosto de 2014; aceptado 20 de Abril de 2015*)

RESUMEN

Se discute la teoría rotacional y los conceptos de cuerpo rígido en Relatividad Especial, postulando una transformación manifiestamente covariante para la rotación relativista. A partir de esa transformación, se analiza el cambio en la geometría de un disco que gira de manera uniforme, resolviendo la paradoja de Ehrenfest. Luego, se determina las expresiones generales de las fuerzas inerciales relativistas para rotaciones alrededor de todos los ejes espaciales y, finalmente, se analiza la dinámica en el sistema de referencia estudiado, hallando expresiones para las fuerzas inerciales con los repectivos términos de corrección. Se muestra que, tanto la transformación como el análisis dinámico, se reducen a las correspondientes para la rotación clásica en el límite de bajas velocidades.

Código(s) PACS: 03.30.+p — 45.40.-f — 45.20.dc

Descriptores: Relatividad especial — Dinámica y cinemática de cuerpos rígidos — Dinámica rotacional

ABSTRACT

Rotational theory and rigid body concepts in special relativity are discussed, postulating a manifestly covariant transformation for the relativistic rotation. Using this transformation the geometrical change of a uniformly rotating disk is analyzed, solving the Ehrenfest paradox. Also, the most general expressions for the relativistic inertial forces are determined for rotations around all the spatial axes and, finally, the dynamics for the studied reference frame is analyzed, finding expressions for the inertial forces with their respective correction terms. It is shown that the transformation and the dynamical analysis are reduced to the corresponding cases for the classical rotation in the low-speed limit.

Subject headings: Special relativity — Dynamics and kinematics of rigid bodies — Rotational dynamics

1. INTRODUCCIÓN.

Desde el origen y desarrollo de la Teoría Especial de la Relatividad por parte de Einstein (1905), surgió la idea de generalizarla para el tratamiento de un cuerpo rígido en rotación. Así, el concepto de rígido en relativista dado por Born (1909) fue -casi inmediatamente- refutado por Ehrenfest (1909) formulando la ahora famosa *Paradoja de Ehrenfest*. Desde entonces, gran parte de la literatura sobre este tema está orientada a la resolución de la misma, sin un resultado claro y convincente. Aparentemente, Einstein, más bien, utilizó el hecho de que la geometría del cuerpo deja de ser euclidiana para desarrollar la Teoría General de la Relatividad.

La paradoja de Ehrenfest condujo a muchos cuestionamientos hacia la Teoría de la Relatividad entre la comunidad, habiendo intentos de reformular la teoría para el caso rotacional (Carmelli 1986), de anular la Teoría Especial de la Relatividad (Rodrigues 1983) y, también, a diferentes intentos de eliminar la paradoja (Cavalleri 1973). En la actualidad, la resolución de esta paradoja y, claro, una formulación dinámica rotacional consistente, sigue siendo un tema de interés para la física teórica (Shaokai 1997; Jo 2012; Rizzi & Ruggiero 2004 debido a las aplicaciones que el rotador relativista puede tener tanto en modelos de partículas elementales, como en modelos cosmológicos.

En el presente trabajo, se trata de hallar un formalismo de la dinámica rotacional para objetos relativistas sin alterar los postulados de la Relatividad Especial ni, en lo posible, destruir la covariancia manifiesta.

[†]vmiguel@fiumsa.edu.bo
[‡]vmiguel@fiumsa.edu.bo

En primer lugar, es importante no ignorar el que, al menos en principio, todo sistema rotatorio debería mostrar efectos relativistas en las regiones muy alejadas del origen. Consecuentemente, las expresiones matemáticas de una trasformación entre un sistema inercial y uno rotatorio deben corresponder gradualmente al caso clásico no únicamente para velocidades angulares bajas sino también en la vecindad del origen.

El tratamiento del disco rígido relativista y, en general, de la dinámica respectiva, sigue muy naturalmente, como se ve más adelante, de las propiedades de tal transformación.

2. TRANSFORMACIÓN ROTACIONAL

En efecto, las consideraciones anteriores requieren que la transformación de coordenadas debe:

(i) Ser expresable en términos de tetratensores, en la forma manifiestamente covariante usual.

(ii) Debe corresponder a un sistema rotatorio en el sentido clásico.

(iii) Debe manifestar efectos relativistas en regiones alejadas del origen, dependiendo únicamente del valor absoluto de la velocidad angular.

Se propone, por tanto, una superposición de transformaciones rotacionales (variables con el tiempo) y transformaciones de Lorentz (variables con el radio) cuya forma explícita puede ser derivada de las consideraciones siguientes:

Aceptando las convenciones usuales, como la métrica

$$\delta^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ,$$

el empuje general de Lorentz (Goldstein & Poole 2001)

$$L^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v_1 & -\gamma v_2 & -\gamma v_3 \\ -\gamma v_1 & 1+gv_1^2 & gv_1v_2 & gv_1v_3 \\ -\gamma v_2 & -gv_2v_1 & 1+gv_2^2 & gv_2v_3 \\ -\gamma v_3 & gv_3v_1 & gv_3v_2 & 1+gv_3^2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

con $g = (\gamma - 1)$, las cantidades $\beta = V/c$ (V = velocidad de la partícula, c = velocidad de la luz en el vacío), $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ y -a menos que se indique expresamente otra opción- $c = 1$, para cierto instante representado por el ángulo θ entre ejes (Fig. 1), un punto en el sistema rotatorio debe tener velocidad tangencial con componentes $(v_1, v_2, 0) = (-\beta sin\theta, \beta cos\theta, 0)$ que fungen como parámetros *instantáneos* para la trasformación de Lorentz (1), esto es,

$$z^{\mu} = L_1{}^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \quad ,$$

$$L_1{}^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta S_\theta & -\gamma\beta C_\theta & 0 \\ \gamma\beta S_\theta & 1+(\gamma-1)S_\theta^2 & -(\gamma-1)S_\theta C_\theta & 0 \\ -\gamma\beta C_\theta & -(\gamma-1)S_\theta C_\theta & 1+(\gamma-1)C_\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

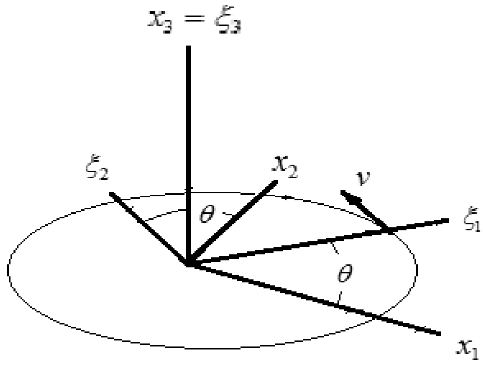

Fig. 1. Rotación del sistema ξ respecto del x.

($S_\theta \equiv sen\theta$; $C_\theta \equiv cos\theta$); ésta, acoplada a la rotacional

$$\xi^{\mu} = \mathbf{R}^{\mu}{}_{\rho} z^{\rho} = \mathbf{R}^{\mu}{}_{\rho} L_1{}^{\rho}{}_{\nu} x^{\nu} \quad ,$$

$$\mathbf{R}^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & sen\theta & 0 \\ 0 & -sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

conduce a la transformación rotacional relativista

$$\xi^{\mu} = \mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{2}$$

con

$$\mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu} = \mathbf{R}^{\mu}{}_{\rho} L_1{}^{\rho}{}_{\nu} \quad . \tag{3}$$

Es posible proceder en el orden inverso; esto es, efectuar primero la rotación instantánea

$$y^{\mu} = \mathbf{R}^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$$

seguida del empuje de Lorentz. En este caso, la primera operación (con el mismo ángulo θ como parámetro) rota los ejes hasta que los auxiliares instantáneos son y^1 perpendicular y y^2 paralelo a la dirección del movimiento (ver Fig. 1); ahora, las componentes de la velocidad para la matriz de Lorentz (1) devienen $(0, v_2, 0) = (0, \beta, 0)$ y dan lugar al operador *instantáneo*

$$L_2{}^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Entonces

$$\xi^{\mu} = L_2{}^{\mu}{}_{\rho} y^{\rho} = L_2{}^{\mu}{}_{\rho} \mathbf{R}^{\rho}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{4}$$

y la rotación relativista será

$$\mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu} = L_2{}^{\mu}{}_{\rho} \mathbf{R}^{\rho}{}_{\nu} \quad . \tag{5}$$

Se comprueba, por cálculo directo, que los productos matriciales (2) y (4) conducen ambos al mismo resultado: la forma explícita de la matriz de transformación $\mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu}$ que es

$$\mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta sen\theta & -\gamma\beta cos\theta & 0 \\ 0 & cos\theta & sen\theta & 0 \\ -\gamma\beta & -\gamma sen\theta & \gamma cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

donde, considerando una velocidad angular constante $(0, 0, \omega)$, es $\beta = \omega r$ y $\theta = \omega x^0$.

Esta transformación es seudo ortogonal en el sentido en que preserva la tetra distancia s. Sin embargo, el hecho de que la matriz (4) depende de las coordenadas complica el ejercicio de hallar la transformación inversa. Como se verá luego, aún es posible usar simplemente la *inversa de la matriz* (5), calculada por el observador no inercial $\{\xi\}$, para el análisis dinámico. Es evidente el que consideraciones similares a las ya empleadas permiten escribir la forma

$$R^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & \gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta sen\theta & cos\theta & -\gamma sen\theta & 0 \\ \gamma\beta cos\theta & sen\theta & \gamma cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

para el paso de $\{\xi\}$ a $\{x\}$, con las modificaciones correspondientes en θ y β.

3. ROTADOR RELATIVISTA

Ahora, sea un disco rígido de radio R girando junto con el sistema $\{\xi\}$ alrededor del eje $\xi_3 = x_3$. Por estar en reposo en el sistema giratorio, la ecuación que describe su circunferencia es, simplemente,

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 = R^2 \quad .$$

Por otra parte, (2) con la matriz (6) proporciona las siguientes 4 ecuaciones:

$$\begin{cases} \xi^0 = \gamma x^0 - \gamma\beta x^2 \\ \xi^1 = cos\theta x^1 + sin\theta x^2 \\ \xi^2 = -\gamma\beta x^0 - \gamma\, sin\theta x^1 + \gamma cos\theta x^2 \\ \xi^3 = x^3 \quad , \end{cases} \tag{8}$$

de modo que la sustitución directa, usando momentáneamente $y^1 = cos\theta x^1 + sin\theta x^2$, $y^2 = -sin\theta x^1 + cos\theta x^2$, conduce a

$$(y^1)^2 + \gamma^2 (y^2 - \beta x^0)^2 = R^2 \quad .$$

Aquí, βx^0 es sólo la distancia relativa entre los orígenes de los sistemas la cual, en este caso, se anula pues $r = 0$ implica $\beta = 0$. Consecuentemente,

$$(y^1)^2 + \gamma^2 (y^2)^2 = R^2 \quad .$$

Pero $\gamma^{-2} = 1 - \beta^2$ por lo que

$$r^2 + \beta^2 [R^2 - (y^1)^2] = R^2 \quad ;$$

finalmente, si $\beta = \omega r$ (la velocidad angular queda como el único parámetro invariante de la transformación) se obtiene de inmediato

$$r^2 \{1 + \omega^2 [R^2 - (x^1 cos\theta + x^2 sen\theta)^2]\} = R^2 \quad . \tag{9}$$

El observador inercial, por tanto, describirá un tipo de elipse rígida rotando alrededor de x^3 cuya forma explícita es representable gráficamente haciendo $\theta = 0$ o, usando todavía las variables rotatorias auxiliares y^1, y^2, introducidas en (4); la ecuación equivalente es

$$r^2 [1 - \omega^2 (y^1)^2 + \omega^2 R^2] = R^2 \tag{10}$$

(obviamente, $r = \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2}$) y corresponde a la curva mostrada en la Figura 1.

La paradoja de Ehrenfest desaparece incluso pensando en que un disco giratorio podría se observado en el sistema inercial si se empezara con alguna forma elíptica en $\{\xi\}$ pues, en tal circunstancia, sería precisamente la contracción relativista la causa de que el disco rotatorio mantuviera sus propiedades geométricas intactas.

Es interesante notar que un sistema en rotación relativista es siempre finito porque, en unidades de c (la velocidad de la luz), se debe cumplir que $\omega r \leq 1$.

En (9), haciendo $y^2 = 0$ -lo que implica $r = y^1$-, se obtiene de inmediato $y^1 = R$ como una raíz adecuada de la ecuación cuártica resultante; pero si $y^1 = 0$, es $y^2 = \frac{R}{\sqrt{1+\omega^2 R^2}}$, que implica una *contracción del radio* cuyo límite es (cuando $\omega R = 1$) $y^2 = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

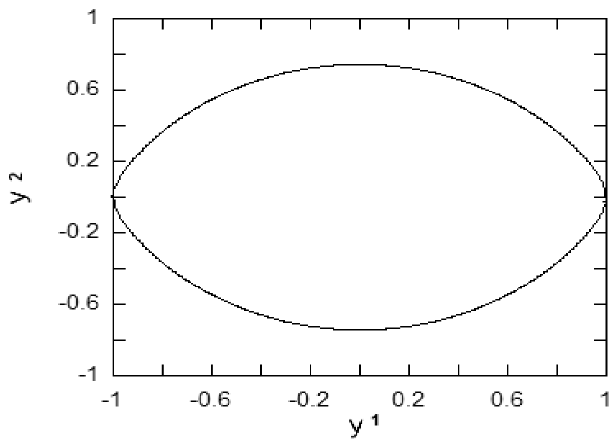

Fig. 2. Esquema del rotador relativista para $\omega = 0.9$.

4. DINÁMICA

Por ser un sistema no inercial, como se sabe, la dinámica en un sistema rotatorio está relacionada con la geometría mediante las ecuaciones de las geodésicas.

No se abordará aquí ese problema dejándolo, más bien, para una segunda parte. Sin embargo, varios detalles dinámicos interesantes pueden ser expuestos como sigue:

Aceptando que (6) permite el paso de puntos del sistema $\{\xi\}$ al $\{x\}$ mediante

$$x^{\mu} = R^{\mu}{}_{\nu} \xi^{\nu} \quad ,$$

con $\beta = \omega\rho$, $\rho = \sqrt{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2}$, $\theta = \omega\xi^0$ y derivando x^μ respecto de s dos veces (como es usual, la longitud de línea mundo, s, se emplea para parametrizar las trayectorias), se obtiene la aceleración en el sistema inercial y las correspondientes aceleraciones inerciales (excepto la de Euler pues ω es constante),

$$\ddot{x}^\mu = \ddot{R}^\mu{}_\nu \xi^\nu + 2\dot{R}^\mu{}_\nu \dot{\xi}^\nu + R^\mu{}_\nu \ddot{\xi}^\nu \quad . \tag{11}$$

4.1. *Ecuación General de Movimiento*

El análisis hecho antes es fácilmente extensible a transformaciones alrededor de los ejes x^1 y x^2, realizando las correcciones apropiadas tanto a la matriz de rotación como a la de empuje de Lorentz. De esta forma, se construye una matriz general de rotación relativista que sea la composición de los operadores individuales.

Entonces, las expresión explícita para la derivada de $R^\mu{}_\nu$ a primer orden respecto del parámetro s es

$$\frac{dR^\mu{}_\nu}{ds} = \frac{\partial R^\mu{}_\nu}{\partial \rho}\dot{\rho} + \frac{\partial R^\mu{}_\nu}{\partial \theta}\dot{\theta} \quad ,$$

representable, como lo demuestra el cálculo directo, por el producto matricial

$$\dot{R}^\mu{}_\nu = R^\mu{}_\rho \Omega^\rho{}_\nu \quad ,$$

donde la matriz de rotación infinitesimal $\Omega^\mu{}_\nu$ es antisimétrica en la parte espacial (al igual que la matriz clásica)

$$\Omega^i{}_j = \gamma \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

mientras que las componentes correspondientes a la parte temporal son simétricas y de la forma

$$\Omega^i{}_0 = \Omega^0{}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ (-\gamma\beta\omega_3 + \gamma^2\omega_2\dot{\rho}^2)) \\ (-\gamma\beta\omega_1 + \gamma^2\omega_3\dot{\rho}^2) \\ (-\gamma\beta\omega_2 + \gamma^2\omega_1\dot{\rho}^2) \end{pmatrix} \quad . \tag{13}$$

Aplicando este resultado a la derivada de segundo orden se obtiene

$$m\ddot{x} = R^\mu{}_\rho m(\Omega^\rho{}_\sigma \Omega^\sigma{}_\nu \xi^\nu + 2\Omega^\rho{}_\nu \dot{\xi}^\nu + \ddot{\xi}^\nu) \quad . \tag{14}$$

Cada una de las componentes mostradas corresponden, por supuesto, a las tetra-fuerzas inerciales.

La fuerza de Coriolis relativista, por ejemplo, tendrá la siguiente forma:

$$2\gamma m \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \\ \vec{\omega} \times \dot{\vec{\xi}} \end{pmatrix} + \beta A^\mu + \gamma\dot{\rho}^2 B^\mu \right] \tag{15}$$

donde las componentes de la matriz A^μ son,

$$\begin{aligned} A^0 &= \dot{\xi}^1\omega_3 + \dot{\xi}^2\omega_1 + \dot{\xi}^3\omega_2 \\ A^1 &= -\dot{\xi}^0\omega_3 \\ A^2 &= -\dot{\xi}^0\omega_1 \\ A^3 &= -\dot{\xi}^0\omega_2 \end{aligned}$$

y, las componentes de la matriz B^μ,

$$\begin{aligned} B^0 &= \dot{\xi}^1\omega_2 + \dot{\xi}^2\omega_3 + \dot{\xi}^3\omega_1 \\ B^1 &= \dot{\xi}^0\omega_2 \\ B^2 &= \dot{\xi}^0\omega_3 \\ B^3 &= \dot{\xi}^0\omega_1 \quad . \end{aligned}$$

Es importante notar que, puesto que la magnitud asociada con $\dot{r}$ tiene que ver con la derivada de la velocidad β respecto de s, si $\beta \to 0$, ese término desaparecerá, quedando solamente la fuerza de Coriolis clásica.

Efectuando nuevamente el producto matricial anterior, se halla que la fuerza centrífuga relativista es:

$$\gamma^2 m \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \\ \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\xi}) \end{pmatrix} + \beta C^\mu \right. \\ \left. + \dot{\rho}^2(\gamma^2\dot{\rho}^2 D^\mu - \gamma E^\mu) \right] \quad ; \tag{16}$$

siendo las componentes de la matriz C^μ

$$\begin{aligned} C^0 &= \beta\xi^0|\vec{\omega}| + \xi^1(\omega_2^2 - \omega_1\omega_3) + \xi^2(\omega_3^2 - \omega_1\omega_2) + \xi^3(\omega_1^2 - \omega_2\omega_3) \\ C^1 &= \beta(\xi^1\omega_3^2 + \xi^2\omega_1\omega_3 + \xi^3\omega_2\omega_3) + \xi^0(\omega_1\omega_3 - \omega_2^2) \\ C^2 &= \beta(\xi^1\omega_1\omega_3 + \xi^2\omega_1^2 + \xi^3\omega_1\omega_2) + \xi^0(\omega_1\omega_2 - \omega_3^2) \\ C^3 &= \beta(\xi^1\omega_2\omega_3 + \xi^2\omega_1\omega_2 + \xi^3\omega_1^2) + \xi^0(\omega_2\omega_3 - \omega_1^2) \quad , \end{aligned}$$

las componentes de D^μ,

$$\begin{aligned} D^0 &= \xi^0|\vec{\omega}|^2 \\ D^1 &= \xi^1\omega_2^2 + \xi^2\omega_2\omega_3 + \xi^3\omega_1\omega_2 \\ D^2 &= \xi^1\omega_2\omega_3 + \xi^2\omega_3^2 + \xi^3\omega_1\omega_3 \\ D^3 &= \xi^1\omega_1\omega_2 + \xi^2\omega_1\omega_3 + \xi^3\omega_1^2 \end{aligned}$$

y, finalmente, las de E^μ,

$$\begin{aligned} E^0 &= 2\beta\xi^0(\omega_3\omega_2 - \omega_1\omega_3 - \omega_1\omega_2) \\ &\quad -\xi^1(\omega_3^2 - \omega_1\omega_2) - \xi^2(\omega_1^2 - \omega_2\omega_3) - \xi^3(\omega_2^2 - \omega_1\omega_3) \\ E^1 &= \beta(2\xi^1\omega_2\omega_3 + \xi^2(\omega_3^2 + \omega_1\omega_2) + \xi^3(\omega_2^2 + \omega_1\omega_3)) \\ &\quad +\xi^0(\omega_3^2 - \omega_1\omega_2) \\ E^2 &= \beta(\xi^1(\omega_3^2 + \omega_1\omega_2) + 2\xi^2\omega_1\omega_3 + 2\xi^3(\omega_1^2 + \omega_2\omega_3)) \\ &\quad +\xi^0(\omega_1^2 - \omega_2\omega_3) \\ E^3 &= \beta(\xi^1(\omega_2^2 + \omega_1\omega_3) + \xi^2(\omega_1^2 + \omega_2\omega_3) + 2\xi^3\omega_1\omega_2) \\ &\quad +\xi^0(\omega_2^2 - \omega_1\omega_3) \quad . \end{aligned}$$

Por otra parte, considerando únicamente partículas libres en el sistema inercial (para no comprometer la interpretación de la inversa de R), con $\ddot{x} = 0$, la ecuación de movimiento de la partícula libre, en el sistema rotatorio, da

$$\ddot{\xi}^\nu + 2\Omega^\rho{}_\nu \dot{\xi}^\nu + \Omega^\rho{}_\sigma \Omega^\sigma{}_\nu \xi^\nu = 0 \ . \tag{17}$$

las fuerzas inerciales clásicas se mantienen bajo la transformación utilizada, pero queda la discusión sobre el significado de los términos correspondientes a las aceleraciones de la parte temporal, relacionados, sin duda, con la potencia desarrollada sobre de la partícula.

4.2. *Dinámica en el Sistema Rotatorio Relativista*

Volviendo a (8), la ecuación de movimiento particular para el sistema estudiado se obtiene rápidamente a partir de las expresiones (14) y (15). Dado que es siempre posible orientar el eje x^3 en la dirección del vector velocidad angular, la pérdida de generalidad no es importante; en este sistema, en el plano x^1-x^2, las componentes de velocidad angular ω_1 y ω_2 se anularán, quedando solamente la componente ω_3 que, en lo que sigue, será escrita como ω.

Así, la aceleración de Coriolis para el problema en cuestión quedará como

$$2\gamma \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\xi}^2\omega \\ \dot{\xi}^1\omega \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \dot{\xi}^1\omega \\ -\dot{\xi}^0\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma\dot{\rho}^2 \begin{pmatrix} \dot{\xi}^2\omega \\ 0 \\ \dot{\xi}^0\omega \\ 0 \end{pmatrix} \right] \ , \tag{18}$$

mientras, la aceleración centrífuga se reduce a

$$\begin{aligned} \gamma^2 & \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -\omega^2\xi^1 \\ -\omega^2\xi^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \xi^0\omega^2 + \xi^2\omega^2 \\ \beta\xi^1\omega^2 \\ -\xi^0\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + \dot{\rho}^2 (\gamma^2 \dot{\rho}^2 \begin{pmatrix} \xi^0\omega^2 \\ 0 \\ \xi^2\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} -\xi^1\omega^2 \\ \beta\xi^2\omega^2 + \xi^0\omega^2 \\ \beta\xi^1\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}) \right] \end{aligned} \tag{19}$$

y corresponden, respectivamente, al segundo y tercer término en el primer miembro de la ecuación (16).

5. CONCLUSIONES

Según lo expuesto, la paradoja de Ehrenfest se origina en la suposición de que un objeto circular en reposo, mantiene su forma cuando es sometido a velocidades angulares relativistas.

La aplicación superpuesta de los efectos conocidos de las operaciones de rotación y empuje de Lorentz, sin embargo, conduce a que tal suposición no es sustentable y, más bien, implica una deformación predecible y calculable del objeto, invalidando la conclusión final de la paradoja.

La importancia de una formulación manifiestamente covariante para la dinámica rotacional relativista es principalmente teórica, pero precede al posible desarrollo de modelos cosmológicos o de microsistemas. La aproximación a un cuerpo rígido rotatorio en relatividad especial, a pesar de ser ampliamente resistida, tiene sustento en diferentes fenómenos físicos observados en la naturaleza (v. g., efecto Sagnac). La transformación utilizada, como se ha esquematizado, permite recuperar también la formulación dinámica de rotaciones, con las obvias correcciones relativistas, las cuales desaparecen gradualmente para velocidades angulares y radios pequeños; esto es, se aproxima contínuamente a su límite clásico. Esto hace a la consistencia de la teoría propuesta.

De hecho, matemáticamente al menos, cualquier sistema rotatorio puede considerarse relativista para radios suficientemente grandes e, inversamente, aún si la velocidad angular es elevada, el sistema puede considerarse clásico para radios suficientemente pequeños.

Finalmente, como se ha procedido, aunque la construcción de una transformación inversa es viable sobre la base de argumentos físicos (ec. (7)), aún no es patente que ambas son matemáticamente inversas. Es preciso no perder de vista que no se trata de una transformación entre sistemas inerciales sino, entre uno inercial y otro acelerado. Tales consideraciones y las que relacionan a la dinámica rotacional con la geometría intrínseca del sistema rotatorio (algebraicamente bastante compleja), como se dijo, serán objeto de un trabajo posterior.

REFERENCIAS

Born M. (1909), *Ann.der Phys.* **335**, 11

Carmelli M. (1986), *Int. Journal of Theoretical Physics.* **25**, 89

Cavalleri G. (1973), *Lett. Nuovo Cimento* **7**, 575

Ehrenfest P. (1909), *Phys. Zeit.* **10**, 918

Einstein A. (1905), *Ann. der Phys.* **17**, 891

Goldstein S. & Poole. (2001), *Classical Mechanics* (Addison Wesley)

Jo S. G. (2012), *Chinese Journal of Physics* **50**, 1

Rizzi G. & Ruggiero M. L. (eds.) (2004), *Relativity in Rotating Frames* (Kluwer Academic Publishers)

Rodrigues W. (1983), *Il Nuovo Cimento* **74**, 199

Shaokai L. (1997), *Applied Mathematics and Mechanics* **19**, 45