REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA **25**, 14–22, 2014
ISSN 1562–3823. INDEXADA EN: SCIELO, LATINDEX, PERIÓDICA

DINÁMICA SEMICLÁSICA DE ENLACE FUERTE EN CAMPOS RÁPIDAMENTE OSCILANTES MÁS UN POTENCIAL ESTÁTICO ARBITRARIO*

SEMICLASSICAL TIGHT-BINDING DYNAMICS IN RAPIDLY OSCILLATING FIELDS PLUS A STATIC ARBITRARY POTENTIAL

L. A. MARTÍNEZ[†], D. SANJINÉS[‡], & J. P. GALLINAR[†]
[†] Departamento de Física, Universidad Simón Bolívar
Apartado 89000, Caracas 1080A
Venezuela &
[‡]Instituto de Investigaciones Físicas, Carrera de Física
Universidad Mayor de San Andrés
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8635
La Paz - Bolivia

Investigamos la dinámica semiclásica inducida en una red unidimensional de enlace fuerte por un campo eléctrico inhomogéneo de alta frecuencia ω, más un potencial estático arbitrario. Encontramos, –de manera análoga al caso del péndulo de Kapitza– un potencial efectivo independiente del tiempo que describe el movimiento eléctronico promedio hasta un orden de ω^{-2}. Este potencial efectivo depende de: el potencial estático externo, la constante de red y el campo eléctrico aplicado de alta frecuencia. Encontramos, notablemente, que la corrección dinámica debida al campo rápidamente oscilante es formalmente idéntica a aquella asociada al péndulo de Kapitza en el régimen del continuo. Finalmente, los resultados de este trabajo se aplican a: el oscilador armónico en la red, el efecto de la oscilación Bloch y fenómenos de "localización dinámica" en arreglos de fibras ópticas (donde hacemos una predicción experimental).

Código(s) PACS: 42.50.Ct — 42.50.Hz — 03.65.Sq

Descriptores: Hamiltoniano efectivo — Modelo semiclásico — Modelo de enlace fuerte

ABSTRACT

We investigate a semiclassical dynamics driven by a high-frequency ω inhomogeneous field, plus a static arbitrary potential on a one-dimensional tight-binding lattice. We find –in the approach of Kapitza's pendulum– an effective, time independent potential that describes the average of the electronic motion to order ω^{-2}. This effective potential depends on the static external potential, on the lattice constant and on the applied high frequency field. Remarkably, we find that the dynamic correction of rapidly oscillating fields is formally identical to that associated to Kapitza's usual continuum result. Finally, applications are made to: the harmonic oscillator on the lattice, the Bloch oscillation effect and "dynamical localization" in arrays of optical waveguides (wherein an experimental prediction is made).

Subject headings: Effective Hamiltonian — Semiclassical model — Tight-binding model

1. INTRODUCCIÓN

El estudio del movimiento electrónico y de los estados electrónicos definidos en espacios discretos o en redes es un asunto de considerable importancia dadas sus aplicaciones en física (Papp & Micu 2007; Mattis 1986; Itin & Neishtadt 2014). Como tales, fenómenos reticulares típicos como las oscilaciones de Bloch (Bloch 1928; Hartmann et al. 2004), localización dinámica (Dunlap & Kenkre 1986; Holthaus & Hone 1996), efectos de estrechamiento de banda (Papp & Micu 2007), localización asintótica (Sanjinés & Gallinar 2001), aumento de la masa excitónica (Mattis 1986; Mattis & Gallinar 1984), y otros, han sido exhaustivamente estudiados tanto cuánticamente como semiclásicamente (Ashcroft & Mermin 1976), donde este ltimo modelo permite tratar de manera más sencilla los efectos combinados en el movimiento electrónico de campos eléctricos aplicados inhomogéneos y campos dependientes del tiempo. En los dispositivos nanoscópicos (Papp & Micu 2007), tanto la naturaleza de enlace fuerte de las bandas (Gallinar & Mattis 1985) como la inhomogeneidad de los campos puede ser importante

*Traducción autorizada de "Semiclassical tight-binding dynamics in rapidly oscillating fields plus a static arbitrary potential", Martínez L. A., Sanjinés D. and Gallinar J.-P., *International Journal of Modern Physics* B **28** (2014) 1450173.

para simular el confinamiento cuántico de los estados electrónicos. Además, a fin de aumentar el interés en estos fenómenos, se sabe que un paquete de ondas fotónico en un arreglo de guías de onda (Dreisow et al. 2011; Longhi 2007) puede simular el comportamiento de un electrón de Bloch moviéndose en una banda de enlace fuerte bajo la influencia de campos electromagnéticos adecuados (Longhi 2007). Ello es una consecuencia de la "ecuación óptica de Schrödinger" (Marte & Stenholm 1997), donde se da una analogía formal entre la variable temporal en la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo (para el electrón de Bloch en la red) y la variable espacial en la "ecuación óptica de Schrödinger" a lo largo del eje longitudinal del arreglo óptico (para el paquete de ondas fotónico). De esta forma, los fenómenos dinámicos cuánticos de la partícula en una red son "mapeados" a lo largo del eje de un arreglo de fibras ópticas donde se observa una distribución estática de intensidad luminosa. Así, los fenómenos oscilación de Bloch (Lenz 1999) y localización dinámica (Longhi et al. 2006) han sido observados; recientemente, el fenómeno de localización asintótica (Sanjinés & Gallinar 2001) fue asimismo confirmado experimentalmente (Dreisow et al. 2011) en un arreglo de fibras ópticas con un perfil de curvatura cúbico. Recientemente se han logrado avances importantes (tanto teóricos como experimentales) en la física de los arreglos de fibras ópticas (Garanovich et al. 2012); dichos arreglos ópticos surgen pues como simuladores cuánticos "bona fide" en el sentido referido en revisiones recientes (Buluta & Nori 2009; Georgescu et al. 2014). Existen entonces algunos escenarios específicos donde es posible buscar aplicaciones experimentales para los resultados teóricos que se presentan en este trabajo, por ejemplo, el que se propone en la sección 4.

Así, después de revisar brevemente algunos de los fenómenos más interesantes que surgen en el contexto del modelo de enlace fuerte, describiremos a continuación el plan a ser desarrollado en este trabajo. Nos proponemos generalizar el tratamiento conocido que hace Kapitza del péndulo invertido (Kapitza 1951) al caso de los campos inhomogéneos (Longhi 2007) en la aproximación semiclásica de enlace fuerte (Ashcroft & Mermin 1976). Se sabe que para una ley de dispersión cuadrática, el método de Kapitza se suele emplear (en el límite de altas frecuencias $\omega \to \infty$) (Bandyopadhyay & Dattagupta 2008) para estudiar, por ejemplo, el confinamiento de "átomos frios" (entre otros) en un potencial efectivo independiente del tiempo. Adaptaremos entonces el método de Kapitza a una banda de enlace fuerte con interacción a primeros vecinos, y de esta forma ser capaces de contrastar nuestros resultados con aquellos que surgen usualmente bajo el modelo de una banda cuadrática. En particular, hallamos que debido a la presencia de la red el potencial efectivo $U_{eff}(X)$ (Cf. Ec. 26) depende cuadráticamente del potencial estático $U(X)$, en contraste con la dependencia lineal que se halla usualmente (Bandyopadhyay & Dattagupta 2008; Rahav et al. 2003). Hallamos además que la corrección dinámica (que varía como ω^{-2} para $\omega \to \infty$) es formalmente similar a la que se obtiene por el método de Kapitza en el régimen del continuo. Y aún más, el potencial efectivo $U_{eff}(X)$ depende también de la posición y el pseudo-momentum iniciales, en contraste con los resultados equivalentes que se halla con el método de Kapitza.

En resumen, y a fin de contrastar los procedimientos, en la seccin II presentamos la deducción de la fórmula para el potencial efectivo (Cf. Ec. 26), donde los detalles de esta deducción se completan en los apéndices A y B. En el apéndice C se invoca el teorema de Kroopnick (Kroopnick 1972) para establecer la condición suficiente para que la magnitud de $X(t)$ permanezca acotada cuando $t \to \infty$. En el apéndice D se hace una aplicación al caso del "oscilador armónico" en la red, caso que fue tratado previamente en la literatura (Longhi 2007; Gallinar & Chalbaud 1991). Finalmente, en el apéndice E se presentan fórmulas para obtener las frecuencias de pequeñas oscilaciones en torno a los mínimos del potencial efectivo $U_{eff}(X)$.

2. DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA PARA EL POTENCIAL EFECTIVO

Las ecuaciones semiclásicas canónicas de movimiento (Ashcroft & Mermin 1976) para un electrón de enlace fuerte moviéndose en una dimensión bajo la influencia de un potencial estático $U(x)$ y de un campo eléctrico rápidamente oscilante $f(x,t)$, están dadas por

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \varepsilon(k)}{\partial k} = 2Aa \operatorname{sen} ka \tag{1}$$

y

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{dU(x)}{dx} + f(x,t); \tag{2}$$

donde A es el elemento de matriz de "salto" (*hopping*) proporcional al ancho de banda, a es la constante de red, k es el pseudo-momento critalino (tomaremos $\hbar \equiv 1$ en este trabajo) y, finalmente, $\varepsilon(k) = 2A(1-\cos ka)$ es la ley de dispersión de enlace fuerte. El campo rápidamente oscilante $f(x,t)$ se puede expresar como una serie de Fourier:

$$f(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x) \exp(in\omega t), \tag{3}$$

donde $f_n(x)$ es la n-ésima componente de Fourier del campo eléctrico $f(x,t)$ de alta frecuencia ω. Por simplicidad suponemos $f_n(x) = f_{-n}(x)$, de tal forma que $f(x,t)$ es una función real y par con respecto al tiempo t. En nuestro sistema, la frecuencia ω se supone mucho mayor que cualquiera de las frecuencias asociadas a la naturaleza del potencial estático $U(x)$. Es más: el promedio temporal sobre el periodo $T = 2\pi/\omega$ de $f(x,t)$ se toma igual a cero, i.e., $\langle f(x,t)\rangle = f_0(x) = 0$. Siguiendo el formalismo de

Kapitza (Kapitza 1951), escribimos $x(t)$ y $k(t)$ como

$$x(t) = X(t) + \xi(t), \tag{4}$$

$$k(t) = K(t) + \eta(t); \tag{5}$$

donde $\xi(t)$ y $\eta(t)$ representan las partes pequeñas y rápidamente oscilantes de la posición $x(t)$ y del pseudo-momentum $k(t)$ respectivamente, con promedios temporales $\langle\xi(t)\rangle = \langle\eta(t)\rangle = 0$. Sustituyendo las Ecs. (4) y (5) en las Ecs. (1) y (2) respectivamente, se tiene que:

$$\dot{X} + \dot{\xi} = 2Aa\,\mathrm{sen}(K+\eta)a, \tag{6}$$

$$\dot{K} + \dot{\eta} = -\frac{dU(x)}{dx} + f(x,t). \tag{7}$$

Si se expande dU/dx y $f(x,t)$ en términos del parámetro pequeño $\xi(t)$, se obtiene a primer orden en $\xi(t)$ que

$$\frac{dU(x)}{dx} = \left(\frac{dU}{dx}\right)_{\xi=0} + \xi\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{\xi=0} + \ldots, \tag{8}$$

y

$$f(x,t) = f(X,t) + \xi\frac{\partial f}{\partial X} + \ldots. \tag{9}$$

La sustitución de las Ecs. (8) y (9) en la Ec. (7) resulta en

$$\dot{K} + \dot{\eta} = -\left(\frac{dU}{dx}\right)_{\xi=0} - \xi\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{\xi=0} + f(X,t) + \xi\frac{\partial f}{\partial X}, \tag{10}$$

hasta primer orden en $\xi(t)$. En la Ec. (10) aparecen dos grupos de términos con características diferentes: términos rápidamente oscilantes y términos que no están perturbados; ambos grupos deben entonces ser iguales por separado. Para los términos oscilatorios podemos escribir

$$\dot{\eta} = f(X,t), \tag{11}$$

pues los términos en la Ec. (10) que contienen $\xi(t)$ son pequeños comparados con el que aparece en la Ec. (11). Promediando los términos restantes en la Ec. (10) sobre un periodo, obtenemos

$$\dot{K} = -\frac{dU}{dX} + \left\langle\xi\frac{\partial f}{\partial X}\right\rangle, \tag{12}$$

donde $\left\langle\dot{K}\right\rangle = \dot{K}$ y $\left\langle\xi\left(d^2U/dX^2\right)\right\rangle = \langle\xi\rangle\left(d^2U/dX^2\right) = 0$. Procedemos ahora con la Ec. (6); expandiéndola obtenemos

$$\dot{X} + \dot{\xi} = 2Aa\left(\mathrm{sen}\,Ka\cos\eta a + \cos Ka\,\mathrm{sen}\,\eta a\right), \tag{13}$$

de donde se separa (como en la Ec. (10)) los términos rápidos y lentos; para la parte rápida se obtiene

$$\dot{\xi}(t) = 2Aa\cos Ka\,\mathrm{sen}\,\eta a, \tag{14}$$

y promediando la parte lenta sobre un periodo resulta

$$\dot{X} = 2Aa\,\mathrm{sen}\,Ka\left\langle\cos\eta a\right\rangle, \tag{15}$$

donde $\left\langle\dot{X}\right\rangle = \dot{X}$ y $\langle\mathrm{sen}\,Ka\cos\eta a\rangle = \mathrm{sen}\,Ka\left\langle\cos\eta a\right\rangle$. A continuación integramos la Ec. (11) y la Ec. (14) (considerando a $X(t)$ y a $K(t)$ como "constants" sobre la escala temporal de T), obteniendo de $\dot{\eta}(t) = f(X,t) = \sum_n f_n(X)\exp(in\omega t)$ que

$$\eta(t) = \sum_n f_n(X)\frac{\exp(in\omega t)}{in\omega}. \tag{16}$$

Para integrar la Ec. (14) aproximamos a primer orden $\mathrm{sen}\,\eta a \simeq \eta a$, y de la Ec. (14) obtenemos

$$\xi(t) = -2Aa^2\cos Ka\sum_n f_n(X)\frac{\exp(in\omega t)}{n^2\omega^2}. \tag{17}$$

Se puede mostrar que las Ecs. (12) y (15) son de la forma hamiltoniana con respecto a las variables lentas $X(t)$ y $K(t)$, con un hamiltoniano efectivo

$$H(X,K) = -2A\left\langle\cos\eta a\right\rangle\cos Ka + U(X), \tag{18}$$

donde $\dot{X} = \partial H/\partial K$ y $\dot{K} = -\partial H/\partial X$ son las ecuaciones canónicas de movimiento. Estas ecuaciones se deducen a partir de las relaciones que se muestran en los apéndices A y B:

$$\left\langle\cos\eta a\right\rangle = 1 - \frac{a^2}{2}\sum_n\frac{f_n^2(X)}{n^2\omega^2}, \tag{19}$$

y

$$\left\langle\xi\frac{\partial f}{\partial X}\right\rangle = 2A\cos Ka\frac{\partial\left\langle\cos\eta a\right\rangle}{\partial X}, \tag{20}$$

respectivamente. Ya que $H(X,K)$ no depende explícitamente del tiempo entonces $E = -2A\left\langle\cos\eta a\right\rangle_0\cos K_0a + U(X_0)$ es una constante de movimiento que representa a la "energía" efectiva de la partcula correspondiente a su movimiento promedio evaluado en las condiciones iniciales X_0 y K_0.

A continuación calculamos el potencial efectivo $U_{eff}(X)$ a través de la definición

$$m\ddot{X} \equiv -\frac{\partial U_{eff}(X)}{\partial X}, \tag{21}$$

donde m es la masa efectiva de enlace fuerte dada por $m \equiv 1/(2Aa^2)$. Ya que de acuerdo a la Ec.(15) se tiene $\dot{X} = 2Aa\,\mathrm{sen}\,Ka\left\langle\cos\eta a\right\rangle$, entonces

$$\ddot{X} = 2Aa^2\dot{K}\cos Ka\left\langle\cos\eta a\right\rangle + 2Aa\dot{X}\,\mathrm{sen}\,Ka\frac{\partial\left\langle\cos\eta a\right\rangle}{\partial X}. \tag{22}$$

Sustituyendo en la Ec. (22) los valores de $\dot{K}$ y $\dot{X}$ dados por las Ecs. (12) y (15) respectivamente, obtenemos

$$\begin{aligned}\ddot{X} = {} & 2Aa^2\cos Ka\left\langle\cos\eta a\right\rangle\left(-\frac{\partial U}{\partial X}\right.\\ & \left.+2A\cos Ka\frac{\partial\left\langle\cos\eta a\right\rangle}{\partial X}\right)\\ & +\left(2Aa\,\mathrm{sen}\,Ka\right)^2\left\langle\cos\eta a\right\rangle\frac{\partial\left\langle\cos\eta a\right\rangle}{\partial X},\end{aligned} \tag{23}$$

de donde sigue una notable simplificación debida a la identidad $\cos^2 Ka + \operatorname{sen}^2 Ka = 1$. El resultado es

$$\ddot{X} = 2Aa^2 \cos Ka \langle \cos \eta a \rangle \left(-\frac{\partial U}{\partial X} \right) + (2Aa)^2 \langle \cos \eta a \rangle \frac{\partial \langle \cos \eta a \rangle}{\partial X}. \quad (24)$$

Expresando en la Ec. (24) el término que contiene a $\cos Ka \langle \cos \eta a \rangle$ a través de la ley de conservación de la energía efectiva E (Cf. Ec. (B4)), obtenemos $-2A \langle \cos \eta a \rangle \cos Ka = E - U(X)$; despreciando en la Ec. (24) los términos del orden de $O(\omega^{-4})$, obtenemos finalmente para la aceleración

$$\ddot{X} = a^2 (E - U(X)) \frac{\partial U}{\partial X} - \frac{1}{2}(2Aa^2)^2 \frac{\partial}{\partial X} \left(\sum_n \frac{f_n^2(X)}{n^2\omega^2} \right); \quad (25)$$

la integral con respecto a X da

$$\frac{U_{eff}(X)}{m} = \frac{a^2}{2} U^2(X) - a^2 U(X) E + \frac{1}{m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2(X)}{n^2\omega^2}, \quad (26)$$

que es la expresión final que obtenemos para el potencial efectivo.

Aunque los resultados centrales de este trabajo (Ecs. (25) y (26)) se dedujeron para un hamiltoniano de enlace fuerte con interacciones a primeros vecinos solamente, la extensión del método que presentamos aquí para incluir interacciones a segundos vecinos se puede realizar de manera directa al sustituir la Ec. (1) por $\partial x/\partial t = \partial \varepsilon(k)/\partial k = 2Aa \operatorname{sen} ka[1 + (4B/A) \cos ka]$, donde B es el elemento de matriz de "salto" correspondiente a las interacciones a segundos vecinos. La consecuencia de este cálculo en el potencial efectivo debe llevar a las mismas conclusiones que las anunciadas por Itin y Neishtadt (Itin & Neishtadt 2014) acerca del efecto combinado debido a campos externos oscilatorios y campos no-uniformes.

3. APLICACIÓN AL OSCILADOR ARMÓNICO FORZADO EN LA RED

Consideremos el movimiento del oscilador armónico en la red (Longhi 2007; Gallinar & Chalbaud 1991) sujeto además a un campo armónico de alta frecuencia. Tomemos $U(x) = \kappa x^2/2$ en la Ec.(26) y $f(x,t) = -\kappa x \cos \omega t$, por simplicidad, a fin de obtener el potencial efectivo $U_{eff}(X)$ dado por

$$\frac{U_{eff}}{m} = \frac{a^2\kappa^2 X^4}{8} - \frac{a^2 E X^2}{2} + \frac{\kappa^2 X^2}{4m^2\omega^2} \quad (27)$$

donde κ es la constante elástica del oscilador. Adoptamos la unidades físicas en las que $\kappa a^2/8 = 1$ es la energa y el inverso del tiempo, y a es la longitud y el inverso del momentum; tomamos como condiciones iniciales $X = X_0$ y $K = 0$. En dichas unidades físicas especiales, la Ec. (27) se convierte en

$$\frac{U_{eff}(X)}{m} = 8X^4 + \frac{\widetilde{\omega}^2 X^2}{2} - 16X_0^2 X^2 + \frac{\widetilde{\omega}^2}{\omega^2} \left(\frac{\widetilde{\omega}^2}{4} - 8X_0^2 \right) X^2, \quad (28)$$

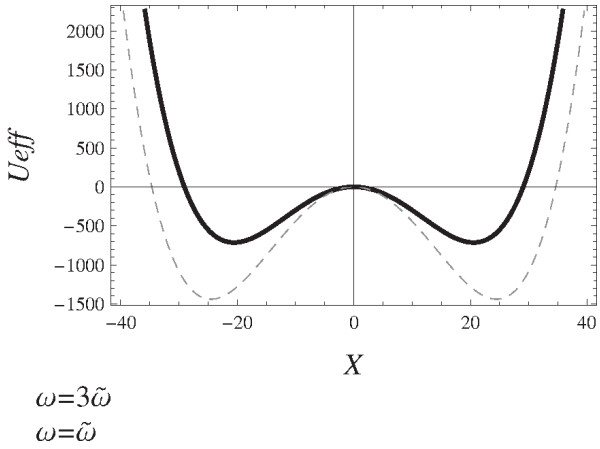

FIG. 1.— Potencial efectivo para el oscilador armónico forzado en la red con U_{eff} dado por la Ec. (28) versus X con posición inicial $X_0 = 30$ y dos valores de ω.

donde $\widetilde{\omega} = 4\sqrt{A}$. Así, el potencial efectivo $U_{eff}(X)$ depende, entre otros, de la posición inicial X_0 y de la frecuencia ω. Para $X_0 < \tilde{\omega}/\sqrt{32}$, $U_{eff}(X)$ tiene un mínimo en $X = 0$; para $X_0 > \tilde{\omega}/\sqrt{32}$, $U_{eff}(X)$ tiene dos mínimos en

$$X_{1,2} = \pm \sqrt{1 + \frac{\widetilde{\omega}^2}{2\omega^2}} \sqrt{X_0^2 - \frac{\widetilde{\omega}^2}{32}}. \quad (29)$$

Como se puede ver en la Fig. 1, la distancia entre estos mínimos aumenta al disminuir ω, tal como lo predice la Ec. (29). Debido a la estructura matemática de $U_{eff}(X)$ en la Ec. (28), la partícula puede oscilar en dos regímenes diferentes: "el régimen de Bloch" (Gallinar & Chalbaud 1991) donde $U_{eff}(X)$ tiene dos mínimos y la partcula oscila en alguno de ellos, y "el régimen del continuo" (Longhi 2007; Gallinar & Chalbaud 1991) donde la partícula o bien visita ambos mínimos, o bien oscila en torno a un mínimo en $X = 0$ cuando $X_0 < \tilde{\omega}/\sqrt{32}$. Estos regímenes están separados por la condición de bifurcación dada por

$$X_0 = \frac{\tilde{\omega}}{4} \left(\frac{1 + \dfrac{\tilde{\omega}^2}{2\omega^2}}{1 + \dfrac{\tilde{\omega}^2}{\omega^2}} \right)^{1/2}. \quad (30)$$

Para $\omega \to \infty$, la Ec. (30) lleva a $X_0 = \tilde{\omega}/4$ como condición de bifurcación en ausencia del campo forzador armónico de alta frecuencia. En la Fig. 2 se muestra las soluciones numéricas de la Ec. (25), donde se puede distinguir ambos regímenes con $X_0 = \sqrt{1000}\sqrt{19/20} = 30.822...$ como el punto de bifurcación entre ellos.

Finalmente, obtenemos la expresión para la frecuencia de la partícula cuando oscila en el régimen de Bloch en torno a los mínimos de $U_{eff}(X)$; usamos para ello $\Omega^2 = (1/m) \left(\partial^2 U_{eff}(X)/\partial X^2 \right)_{X_0}$, obteniéndose

$$\Omega = \sqrt{2 + \frac{\tilde{\omega}^2}{\omega^2}} \sqrt{32X_0^2 - \tilde{\omega}^2}, \quad (31)$$

donde la frecuencia efectiva aumenta en presencia

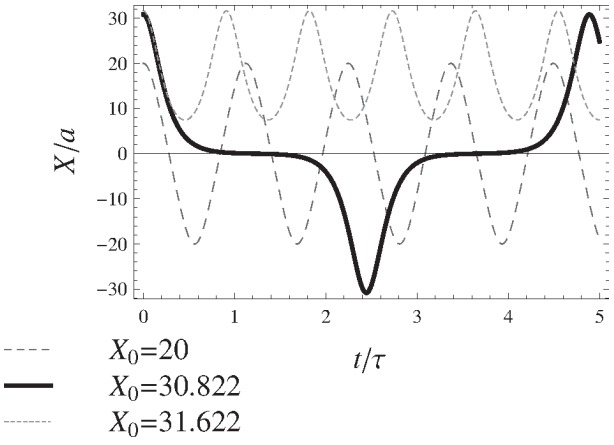

FIG. 2.— Posición semiclásica X/a en unidades de la distancia a versus tiempo t/τ en unidades de τ, con $\omega = 3\tilde{\omega}$. El valor crítico del punto de bifurcación para este sistema es $X_0 = 30.822$.

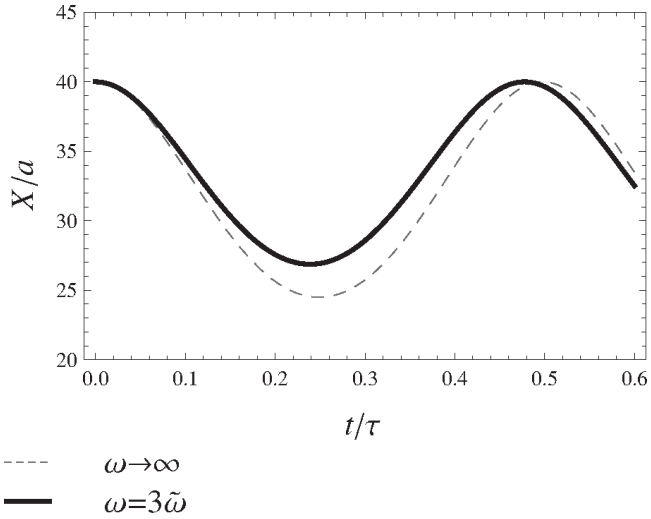

FIG. 3.— Comparación del movimiento de la partícula en $X_0 = 40$ cuando está sujeta al campo armónico "estático" y al campo armónico forzador de alta frecuencia. Se puede ver que la amplitud y el periodo del movimiento de la partcula decrecen en presencia del campo del alta frecuencia.

del campo rápidamente oscilante. Este incremento en la frecuencia efectiva se verifica al comparar numéricamente la solución $X(t)$ del caso estático con la solución respectiva para el caso $\omega = 3\tilde{\omega}$, $X_0 = 40$, que se muestra en la Fig. 3.

4. APLICACIÓN A FENÓMENOS DE LOCALIZACIÓN. PREDICCIÓN EXPERIMENTAL DE "LOCALIZACIÓN DINÁMICA" EN ARREGLOS DE FIBRAS ÓPTICAS

Considérese el hamiltoniano de enlace fuerte $H(x,p) = -2A\cos ap + U(x,t)$ (con $p = -i\hbar\partial_x$) cuyos eigenvalores $\varepsilon(k)$ constituyen la ley de dispersión para la velocidad semiclásica dada en la Ec. (1); el potencial dependiente del tiempo $U(x,t) = U(x) - \int \mathrm{d}x f(x,t)$ ya contiene al potencial estático $U(x)$ y al campo oscilante $f(x,t)$ que aparecen en la "fuerza" semiclásica en la Ec. (1). En este escenario físico ocurren los fenómenos de "localización" de un electrón en una red unidimensional tal como lo refirieron Dunlap y Kenkre (Dunlap & Kenkre 1986): si la proyección del desplazamiento cuadrático medio $w(t) \equiv \sum_n a^2 n^2 |C_n(t)|^2$ en la red permanece acotado cuando $t \to \infty$, entonces la partícula estará localizada (esta condición implica asimismo que el valor medio de la posición $z(t) \equiv \sum_n a^2 n |C_n(t)|^2$ también permanece acotado). En las expresiones anteriores $\Psi(x,t) = \sum_n C_n(t)\Phi(x - na)$ es la función de onda que resuelve la ecuación de Schrödinger; $\Phi(x - na)$ son las funciones de Wannier que están localizadas en torno a los sitios de la red con posiciones $x = na$ (para n entero). Los casos relevantes de localización que fueron reportados en la literatura corresponden a los siguientes potenciales: (i) oscilación de Bloch (Bloch 1928; Hartmann et al. 2004) cuando $U(x,t) = \alpha x$; (ii) localización dinámica AC (Dunlap & Kenkre 1986; Holthaus & Hone 1996) cuando $U(x,t) = \alpha x \cos\omega t$ ($J_0(\alpha/\omega) = 0$) y localización dinámica AC+DC (Holthaus & Hone 1996; Zhao 1991) cuando $U(x,t) = \epsilon_0 + \alpha x \cos\omega t$ ($\epsilon_0/\omega \neq Z$); localización asintótica (Sanjinés & Gallinar 2001) cuando $U(x,t) = \alpha x t$. Las condiciones de localización en el caso (ii) se hallan entre paréntesis.

La definición de localización puede relacionarse con la definición de "acotamiento" de una función $y(t)$ que resuelve la ecuacin diferencial ordinaria, autónoma y –en general– no-lineal $\dot{y} = g(y)$, i.e., $\lim_{t\to\infty} |y(t)|$ no debe diverger. Ya que esta ecuación se puede escribir como $\ddot{y} = g(y)g'(y)$, entonces la condición de acotamiento para $y(t)$ está dada por el teorema de Kroopnick (apéndice C), donde $y(t)$ se identificó al describir el esquema de Kapitza (sección 2) con nuestra posición media $X(t)$ que varía lentamente en $x(t) = X(t) + \xi(t)$. Esto su vez nos permite realizar la conjetura de que la posición semiclásica $X(t)$ se puede relacionar físicamente con $z(t)$, la posición media del paquete de ondas cuántico definida arriba, i.e., cuando $X(t)$ esté acotada[1] en la Ec. (25), entonces la correspondiente $z(t)$ también estará acotada[2] (al menos, como una condición suficiente). Entonces, el criterio de Kroopnick toma la forma $\lim_{|X|\to\infty} U^2(X) = \infty$ y/o $\lim_{|X|\to\infty} f_n^2(X) = \infty$ para n entero, donde $U(X)$ es la parte estática del potencial cuántico $U(X,t)$ y $f_n(X)$ son los coeficientes de Fourier de la fuerza periódica $f(X, t+T) = f(X,t)$.

A continuación dirigimos la atención hacia los casos de localización AC y AC+DC referidos arriba en el inciso (ii), que son los casos especiales del potencial lineal $U(X,t) = U(X) - \int \mathrm{d}X f(X,t) \equiv XF(t)$ correspondiente a una fuerza periódica y homogénea $f(X, t+T) = f(X,t)$ (en este caso, los coeficientes de Fourier $f_n(X) = f_n$ también son independientes de X). Queremos verificar si sus correspondientes condiciones de localización cuántica conocidas para valores grandes de ω son consistentes con la condición de Kroopnick. En el caso AC, $U(X) = 0$, en-

[1] Se puede demostrar que si $X(t)$ está acotada, también lo está $\dot{X}(t)$, de tal forma que la región en el espacio fase para la evolución del sistema es finita.

[2] Nótese que el valor cuadrático medio no tiene un equivalente semiclásico, lo que no impide formular la conjetura "acotamiento implica localización".

tonces $\lim_{|X|\to\infty} U^2(X) \neq \infty$ y $\lim_{|X|\to\infty} f_n^2(X) \neq \infty$, por lo que la condición de Kroopnick no se verifica (no hay localización); en el caso AC+DC, $U(X) = \epsilon_0 X$, entonces $\lim_{|X|\to\infty} U^2(X) = \infty$ y $\lim_{|X|\to\infty} f_n^2(X) \neq \infty$, así que la condición de Kroopnick se verifica (hay localización). Las correspondientes condiciones cuánticas de localización son las mismas cuando ω es grande: en el caso AC, $J_0(\alpha/\omega) = 0$ no se cumple y por lo tanto no hay localización; en el caso AC+DC, $\epsilon_0/\omega \notin Z$ se cumple y por lo tanto hay localización. En vista de lo anterior, podríamos elaborar un argumento físico acerca de la transición del régimen AC (con potencial $U(X,t) = \alpha X \cos\omega t$) al régimen AC+DC (con potencial $U(X,t) = \epsilon_0 X + \alpha X \cos\omega t$) en términos de una transición de un régimen de deslocalización a un régimen de localización. Podemos observar que dicha transición consiste solamente de añadir el potencial $\epsilon_0 X$ al potencial AC. Sin embargo, tal adición puede ser un asunto complicado en una red de estado sólido. Veremos a continuación que en el dominio óptico de un arreglo de guías de onda, dicha adición se transforma en un procedimiento bastante práctico.

De manera interesante, los resultados teóricos descritos arriba pueden encontrar un escenario experimental donde las predicciones serían confirmadas (o refutadas). Como se mencionó al principio de este trabajo (sección 1), existe una analogía formal entre el comportamiento de un electrón moviéndose en una red de enlace fuerte bajo el efecto de campos electromagnéticos especficos, y un paquete de ondas fotónico propagándose a lo largo de un arreglo de fibras ópticas con perfiles de curvatura específicos. Así, los fenómenos dinámicos cuánticos para el electrón en la red (en el dominio temporal) son "mapeados" a lo largo del eje del arreglo de fibras ópticas (en el dominio espacial). Esto es posible después de aplicar la transformación de Kramers-Henneberger a la "ecuación óptica de Schrödinger" (Longhi et al. 2006), de lo que resulta

$$\left[-\frac{\bar{\lambda}^2}{2n_s}\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + U_{opt}(x')\right]\Phi + \left[n_s\frac{\partial^2 x_0(z)}{\partial z^2}\right]x'\Phi = i\bar{\lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \tag{32}$$

donde: z es la coordenada axial del arreglo óptico, $x' \equiv x - x_0(z)$ es la coordenada transversal transformada, x es la coordenada transversal del arreglo donde las fibras ópticas están distribuidas periodicamente con distancia de separación a, $U_{opt}(x) \equiv n_s - n(x)$, $n(x) = n(x+a)$ es el índice de refracción efectivo del arreglo óptico, n_s es el índice de refracción del sustrato material que conforma cada fibra óptica, $x(0)$ describe el perfil de curvatura periódica del arreglo con periodo $\Lambda \gg \lambda$. Podemos reconocer en la Ec. (32) una ecuación tipo Schrödinger para una partícula de "masa" n_s moviéndose en una red con "potencial periódico" $U_{opt}(x')$ y sujeta a una "fuerza" externa $n_s\partial^2 x_0(z)/\partial^2 z$; $\bar{\lambda} \equiv \lambda/2\pi = 1/k$ equivale a la constante cuántica $\hbar$. Ya que el "potencial" externo en la Ec. (32) es lineal en x' y ya que la coordenada espacial óptica z se relaciona con la variable temporal cuántica t, entonces los casos (i)-(iii) de localización descritos al inicio de esta sección se describen de manera equivalente por la Ec. (32) en el dominio espacial óptico. Así, para un perfil de curvatura parabólico $x_0 \propto z^2$ se obtuvo el efecto análogo a la oscilación de Bloch (Lenz 1999); para un perfil de curvatura periódico $x_0 \propto \cos(2\pi z/\Lambda)$ se observó experimentalmente el efecto análogo a la localización dinámica AC (Longhi et al. 2006); y para un perfil de curvatura cúbico $x_0 \propto z^3$ el efecto análogo a la localización asintótica fue asimismo observado experimentalmente (Dreisow et al. 2011). Para el caso AC, está claro que para un valor mayor de ω (i.e., un menor valor de Λ) la condición de localización $J_0(\alpha/\omega) = 0$ no se verifica y por lo tanto ocurre deslocalización, lo que a su vez implica que el paquete óptico se dispersa a lo largo del eje transversal x. Sin embargo, si este arreglo óptico se somete a una curvatura parabólica global, entonces se logra en el dominio óptico el equivalente al caso de localización AC+DC pues la condición $\epsilon_0/\omega \notin Z$ se verifica, así que el paquete óptico no se dispersa y permanace acotado o confinado en torno a la regin paraxial del eje z. Este interesante efecto debería observarse como se indica en la Fig. 4, donde los valores de los parámetros físicos se tomaron de Longhi *et al.* (Longhi et al. 2006). El procedimiento experimental sería entonces sencillo: el arreglo con un perfil periódico de curvatura $x_0 \propto \cos(2\pi z/\Lambda)$ donde no hay localización, se dobla con un perfil parabólico global Cz^2 (cualquier valor real de C sería, en principio, suficiente). El resultado entonces es que un paquete óptico inicialmente disperso se localizaría en torno al eje z, logrando así la transición de un régimen de deslocalización a uno de localización.

5. CONCLUSIONES

Aplicamos un método similar al de Kapitza (Kapitza 1951) que permitió obtener una expresión novedosa para la aceleración efectiva independiente del tiempo de un electrón en una red de enlace fuerte (Cf. Ec. (25)); sobre este electrón actúan un campo eléctrico armónico rápidamente oscilante ($\omega \to \infty$) y un potencial estático arbitrario. Los resultados que obtuvimos se pueden expresar en los términos de un potencial efectivo simple (Cf. Ec. (26)) vía la introducción de una masa efectiva de enlace fuerte m (Cf. Ec. (21)). En el límite del continuo definido por $a \to 0$ y $A \to \infty$, donde $\lim_{\substack{a\to 0\\ A\to\infty}} 1/(2Aa^2) = m^*$, el potencial efectivo $U_{eff}(X)$ resulta ser (m^* es la masa en el continuo)

$$\lim_{m\to m^*}\frac{U_{eff}(X)}{m} = \lim_{\substack{a\to 0\\ A\to\infty}}\left(\frac{a^2}{2}U^2(X) - a^2U(X)E + \frac{1}{m^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n^2(X)}{n^2\omega^2}\right);$$

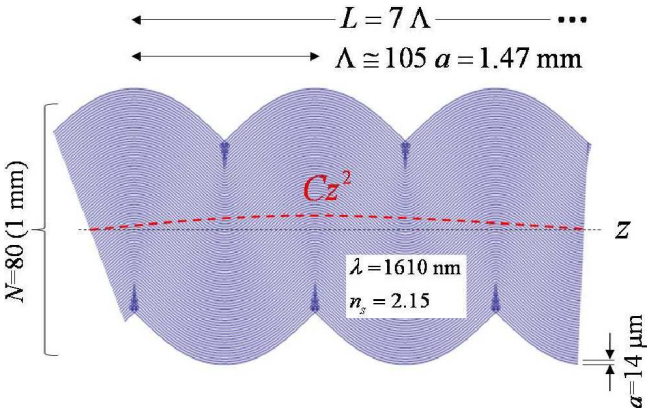

FIG. 4.— Arreglo experimental del efecto de "transición deslocalización-localización" propuesto en este trabajo, con los valores de los parámetros físicos tomados de Longhi *et al.* (Longhi et al. 2006) El arreglo de $N = 80$ fibras ópticas separadas entre sí por una distancia constante $a = 14\mu$m y con índice de refracción $n_S = 2.15$, se acomoda en el eje transversal x. Un paquete de ondas laser centrado en 1610 nm incide sobre el arreglo y se propaga a lo largo de la coordenada z hasta una distancia $L = 7\Lambda$. Para este valor del periodo espacial Λ el paquete se debe dispersar, pero predecimos que una curvatura global parabólica con perfil Cz^2 debe confinar al paquete en la zona paraxial ($x' \sim 0$). El límite de Λ pequeño (correspondiente a un valor grande de ω en el dominio temporal del esquema de Kapitza) se logra aquí en el límite de "estrangulación" en el que las fibras ópticas en los extremos del arreglo pierden su perfil espacial suave.

pero

$$\lim_{\substack{a\to 0\\ A\to\infty}} \left[-a^2U(X)\left(-2A\left\langle\cos\eta a\right\rangle\cos Ka + U(X)\right)\right] =$$

$$= \lim_{\substack{a\to 0\\ A\to\infty}} 2Aa^2U(X) = \frac{U(X)}{m^*},$$

de tal forma que finalmente

$$U_{eff}(X) = U(X) + \frac{1}{m^*}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n^2(X)}{n^2\omega^2}, \qquad (33)$$

que es el mismo resultado ya conocido en el continuo para el potencial efectivo $U_{eff}(X)$ (Kapitza 1951; Bandyopadhyay & Dattagupta 2008; Rahav et al. 2003). Notablemente, la corrección dinámica de alta frecuencia del orden de $O(\omega^{-2})$ en la Ec. (26) es formalmente similar a aquella asociada al límite del continuo, lo que se aplica asimismo a las aceleraciones respectivas. Podramos conjeturar si acaso esta similitud se mantiene (cuando $\omega \to \infty$) hasta el siguiente orden $O(\omega^{-4})$ entre el resultado en el continuo y el resultado (aún desconocido) en la red. Finalmente, resulta interesante señalar que de la Ec. (17) para $\xi(t)$ se puede demostrar la fórmula

$$\frac{1}{2}m\left\langle\dot{\xi}^2\right\rangle = \frac{1}{m}\left(\cos^2 Ka\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n^2(X)}{n^2\omega^2}; \qquad (34)$$

así, para $a \to 0$ (en el continuo) la corrección de alta frecuencia para el potencial efectivo (para $\omega \to \infty$) es igual al valor medio de la energía cinética del movimiento oscilatorio dado por $\frac{1}{2}m^*\left\langle\dot{\xi}^2\right\rangle$. En resumen, la nueva fórmula dada en la Ec. (26) generaliza el célebre resultado de Kapitza para el péndulo invertido (Kapitza 1951) al caso de un electrón de enlace fuerte. De esta forma, surgen aplicaciones interesantes (entre otras) al caso del oscilador armónico en la red (Longhi 2007; Gallinar & Chalbaud 1991) y al efecto de la oscilación de Bloch (Bloch 1928), y asimismo se puede considerar como un primer paso conceptual importante en el estudio más profundo (hasta el orden de $O(\omega^{-4})$) de los efectos debidos a un campo forzador de alta frecuencia en la red. En particular, y motivados por la evidencia experimental reciente de localizacin dinámica y localización asintótica en arreglos de fibras ópticas, propusimos en la Sec. 4 un bosquejo de experimento que podría servir para verificar la predicción teórica de que en un arreglo tal con un perfil de curvatura periódico (de periodo pequeño), un paquete de ondas fotónico se debería dispersar, pero si además se aplica a todo al arreglo una curvatura global parabólica, entonces se debería inhibir la dispersión del paquete y éste permanecería confinado en la región paraxial del arreglo. Este experimento propuesto podría permitir ampliar el rango de aplicaciones de los resultados presentados aquí.

APÉNDICE

A. DEDUCCIÓN DEL VALOR DEL TÉRMINO $\langle\cos\eta A\rangle$

Expandiendo $\cos\eta a$ hasta el orden de ω^{-2} y promediando, se obtiene

$$\langle\cos\eta a\rangle \simeq 1 - \frac{\left\langle\eta^2\right\rangle a^2}{2} + O(\omega^{-4}), \qquad (A1)$$

donde $\eta(t)$ está dada por la Ec. (16). Así,

$$\left\langle\eta^2\right\rangle = -\sum_{n,m}\frac{f_n(X)f_m(X)}{nm\omega^2}\left\langle e^{i(n+m)\omega t}\right\rangle, \qquad (A2)$$

donde

$$\left\langle e^{i(n+m)\omega t}\right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T e^{i(n+m)\omega t}dt = \delta_{n,-m}, \qquad (A3)$$

lo que da

$$\left\langle\eta^2\right\rangle = -\sum_{n,m}\frac{f_n(X)f_m(X)}{nm\omega^2}\delta_{n,-m} = \sum_n\frac{f_n^2(X)}{n^2\omega^2},$$

ya que $f_n(X) = f_{-n}(X)$. Finalmente, la Ec. (A1) resulta en

$$\langle\cos\eta a\rangle = 1 - \frac{a^2}{2}\sum_n\frac{f_n^2(X)}{n^2\omega^2} + O(\omega^{-4}). \qquad (A4)$$

B. DEDUCCIÓN DEL VALOR DEL TÉRMINO $\left\langle\xi\frac{\partial F}{\partial X}\right\rangle$

Sustituyendo $\xi(t)$ por su valor dado en la Ec. (17) y $f(X,t)$ dado en la Ec. (3), se obtiene

$$\left\langle \xi \frac{\partial f}{\partial X} \right\rangle = -2Aa^2 \cos Ka \sum_{n,m} \frac{f_n(X)}{n^2\omega^2} \frac{\partial f_m(X)}{\partial X} \cdot \left\langle e^{i(n+m)\omega t} \right\rangle \quad \text{(B1)}$$

$$= -2Aa^2 \cos Ka \sum_{n} \frac{f_n(X)}{n^2\omega^2} \frac{\partial f_{-n}(X)}{\partial X}$$

$$= -2Aa^2 \cos Ka \sum_{n} \frac{1}{2n^2\omega^2} \frac{\partial f_n^2(X)}{\partial X}; \quad \text{(B2)}$$

de lo que finalmente resulta (usando la Ec. (A3)):

$$\left\langle \xi \frac{\partial f}{\partial X} \right\rangle = 2A \cos Ka \frac{\partial \langle \cos \eta a \rangle}{\partial X}. \quad \text{(B3)}$$

Es conveniente señalar que la relación

$$E = -2A \langle \cos \eta a \rangle \cos Ka + U(X) = \text{const.} \quad \text{(B4)}$$

se puede obtener asimismo de las Ecs. (12) y (15), las que al dividirse dan

$$\frac{dX}{dK} = \frac{2Aa \operatorname{sen} Ka \langle \cos \eta a \rangle}{-\dfrac{\partial U}{\partial X} + 2A \cos Ka \dfrac{\partial \langle \cos \eta a \rangle}{\partial X}}, \quad \text{(B5)}$$

lo que conduce a la diferencial exacta $\mathrm{d}\left(-2A \langle \cos \eta a \rangle \cos Ka + U(X)\right) = 0$, y de aquí se tiene la Ec.(B4). Es interesante notar que en la Ec. (B4) el factor de estrechamiento de la banda $\langle \cos \eta a \rangle$ coincide con la suma de los primeros dos términos de la expansión de $J_0(e\varepsilon a/\omega)$, donde J_0 es la función de Bessel de primer tipo y orden cero, i.e,

$$\langle \cos \eta a \rangle = 1 - \frac{a^2}{2} \left(\frac{f_1^2 + f_{-1}^2}{\omega^2} \right) \simeq J_0 \left(\frac{e\varepsilon a}{\omega} \right)$$

$$= 1 - \frac{a^2 e^2 \varepsilon^2}{4\omega^2} + O(\omega^{-4}), \quad \text{(B6)}$$

con $f_1(X) = f_{-1}(X) = -e\varepsilon/2$. Este resultado coincide hasta el orden de $O(\omega^{-4})$, como debe ser, con el resultado exacto para la condición de localización dinámica, i.e., $J_0\left(e\varepsilon a/\omega\right) = 0$, lo que equivale a la anulación del ancho de banda efectivo para el electrón de carga eléctrica $(-e)$ en presencia de un campo eléctrico oscilante y homogéneo $\varepsilon \cos \omega t$.

C. CRITERIO DE KROOPNICK PARA MOVIMIENTO CONFINADO

En este apéndice mostramos que, de acuerdo al teorema de Kroopnick (Kroopnick 1972), una condición suficiente para que las soluciones $X(t)$ de la Ec. (25) estén confinadas (o acotadas) en el límite $t \to \infty$, está dada por $\lim_{|X|\to\infty} U^2(X) = \infty$ y/o $\lim_{|X|\to\infty} f_n^2(X) = \infty$ para algún entero n. El referido teorema de Kroopnick establece que: para la ecuación

$$\ddot{X} + a(t)b(X) = 0, \quad \text{(C1)}$$

donde $a(t) > 0$ y $b(X)$ son funciones continuas en los intervalos $R^+ = [0, \infty)$ y R respectivamente, si $\dot{a}(t) \leq 0$ (con $t \geq T$) y $\lim_{X\to\pm\infty} \int^X b(u)du = \infty$, entonces todas las soluciones $X(t)$ de la Ec. (C1) están confinadas en el límite $t \to \infty$. En efecto, comparando la Ec. (25) con la Ec. (C1) se puede establecer $a(t) = 1$ y elegir

$$b(X) \equiv a^2 \left(U(X) - E\right) \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{m^2} \frac{\partial}{\partial X} \left(\sum_n^\infty \frac{f_n^2(X)}{n^2\omega^2} \right); \quad \text{(C2)}$$

integrando $b(X)$ resulta entonces

$$\int^X b(u)du = \frac{a^2}{2} \left(U(X) - E\right)^2 + \frac{1}{m^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{f_n^2(X)}{n^2\omega^2}. \quad \text{(C3)}$$

Así, la condición de Kroopnick $\lim_{X\to\pm\infty} \int^X b(u)du = \infty$ se cumple si $\lim_{|X|\to\infty} U^2(X) = \infty$ y/o $\lim_{|X|\to\infty} f_n^2(X) = \infty$ para algún entero n. Para que este resultado corresponda a la aplicación del teorema de Kroopnick es necesario que: $a(t) = 1 > 0$ y $\dot{a}(t) = 0 \leq 0$ (para algún T tal que $t \geq T$, por ejemplo, $T = 0$), donde $a(t)$ es una función continua en $R^+ = [0, \infty)$ y que $b(X)$ en (C.2) sea continua en R. Ya que todas estas condiciones se cumplen, entonces la aplicación del teorema de Kroopnick es válida.

D. FRECUENCIAS CUASI-ARMÓNICAS DE OSCILACIONES PEQUEÑAS

Aplicamos la fórmula

$$\Omega^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{\partial^2 U_{eff}(X)}{\partial X^2} \right)_{X_0}, \quad \text{(D1)}$$

donde Ω es la frecuencia angular de las pequeñas oscilaciones cuasi-armónicas en torno al mínimo X_0 del potencial efectivo $U_{eff}(X)$, a fin de obtener expresiones apropiadas para Ω con las condiciones $f_n(X) \equiv 0$ para todo entero n. En efecto, tenemos entonces que (Cf. Ec. (26)):

$$\frac{1}{m} U_{eff}(X) = \frac{a^2}{2} U^2(X) - a^2 E U(X); \quad \text{(D2)}$$

derivando la Ec. (D2) obtenemos

$$\frac{1}{m} \frac{\partial U_{eff}}{\partial X} = a^2 \left(\frac{\partial U(X)}{\partial X} \right) \left(U(X) - E\right), \quad \text{(D3)}$$

y

$$\Omega^2 = a^2 \left(\frac{\partial^2 U(X)}{\partial X^2} \right)_{X_0} \left(U(X_0) - E\right) + a^2 \left(\frac{\partial U(X)}{\partial X} \right)^2_{X_0}. \quad \text{(D4)}$$

Si X_0 es un mínimo de $U_{eff}(X)$, entonces obtenemos de las Ecs. (D3) y (D4) para $\Omega_1 > 0$ y $\Omega_2 > 0$:

$$\Omega_1^2 = a^2 \left(\frac{\partial U(X)}{\partial X} \right)^2_{X_0} \quad \text{(D5)}$$

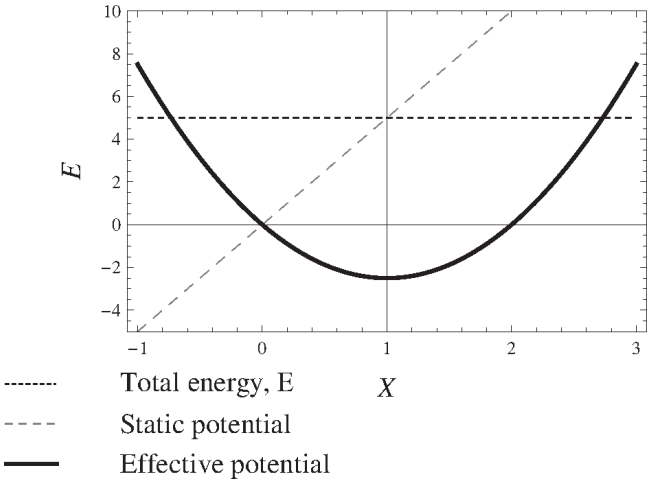

FIG. D1.— Potencial efectivo parabólico; la línea sólida representa U_{eff}/ma^2E.

cuando $U(X_0) = E$, o bien,

$$\Omega_2^2 = a^2 \left(\frac{\partial^2 U(X)}{\partial X^2} \right)_{X_0} (U(X_0 - E)) , \qquad \text{(D6)}$$

cuando $(\partial U(X)/\partial X)_{X_0} = 0$. Para ilustrar la aplicación de las Ecs. (D5) y (D6) a un caso sencillo, consideremos la oscilación de Bloch. En este caso $U(X) = e\varepsilon_0 X$ para un electrón de carga elctrica $(-e)$ sujeto a un campo eléctrico estático y homogéneo ε_0. Ya que $(\partial U/\partial X)_{X_0} \neq 0$, entonces sólo existe una frecuencia de la forma Ω_1 dada por la Ec. (D5). Luego, $U_{eff}(X)/m$ está dado por

$$\begin{aligned} \frac{U_{eff}(X)}{m} &= \frac{1}{2} a^2 e^2 \varepsilon_0^2 X^2 - a^2 E e \varepsilon X \\ &= \frac{a^2}{2} \left[(e\varepsilon_0 X - E)^2 - E^2 \right] . \end{aligned} \qquad \text{(D7)}$$

La Ec. (D7) corresponde a un pozo parabólico desplazado como se muestra en la Fig. D1. Obtenemos así la expresión independiente de la energa $\Omega_1 = ae\varepsilon_0$, que es la solución exacta conocida para la oscilación de Bloch, que en este caso es equivalente a un oscilador armónico simple.

REFERENCIAS

Ashcroft N. & Mermin N. (1976), *Solid State Physics* (Holt, Rinehart Winston)
Bandyopadhyay M. & Dattagupta S. (2008), *Pramana J. Phys*, **70**, 381
Bloch F. (1928), *Z. Phys.*, **52**, 555
Buluta I. & Nori F. (2009), *Science*, **326**, 108
Dreisow F., Bahat-Treidel O., Welt D. & Szameit A. (2011), *Opt. Lett.*, **36**, 2065
Dunlap D. H. & Kenkre V. M. (1986), *Phys. Rev. B*, **34**, 3625
Gallinar J. P. & Chalbaud E. (1991), *Phys. Rev. B*, **43**, 2322
Gallinar J. P. & Mattis D. C. (1985), *J. Phys. A: Math. Gen.*, **18**, 2583
Garanovich I. L., Longhi S., Sukhorukova A. & Kivshar Y. (2012), *Phys. Rep.*, **518**, 1
Georgescu I., Ashhab, S. & Nori F. (2014), *Rev. Mod. Phys.*, **86**, 153
Hartmann T., Keck F., Korsch H. J. & Mossmann S. (2004), *New J. Phys.*, **6**, 2
Holthaus M. & Hone D. (1996), *Phil. Mag. B*, **74**, 105
Itin A. & Neishtadt A. (2014), *Phys. Lett. A*, **378**, 822
Kapitza P. L. (1951), *Collected papers of P. L. Kapitza* (Pergamon Press, Oxford)
Kroopnick A. (1972), *Proc. Amer. Math. Soc.*, **34**, 319
Lenz G. (1999), *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 963
Longhi S. (2007), *Phys. Rev. B*, **76**, 195119
Longhi S., Marangoni M., Lobino M., Ramponi R. & Laporta P. (2006) arXiv: quant-ph/0511132v2
Marte M. & Stenholm S. (1997), *Phys. Rev. A*, **56**, 2940
Mattis D. C. (1986), *Rev. Mod. Phys.*, **58**, 361
Mattis D. C. & Gallinar J. P. (1984), *Phys. Rev. Lett.*, **53**, 1391
Papp E. & Micu C. (2007), *Low-dimensional nanoscale systems on discrete spaces* (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.)
Rahav S., Gilary I. & Fishman S. (2003), *Phys. Rev. A*, **68**, 013820
Sanjinés D. & Gallinar J. P. (2001), *Phys. Rev. B*, **64**, 054301
Zhao X. G. (1991), *Phys. Lett. A*, **155**, 299