

## UN CRITERIO PARA LOCALIZACIÓN DINÁMICA CON BASE EN EL ESQUEMA DEL PÉNDULO DE KAPITZA EN LA RED

### A CRITERION FOR DYNAMIC LOCALIZATION BASED ON THE KAPITZA PENDULUM SCHEME IN THE LATTICE

DIEGO SANJINÉS C.†

Instituto de Investigaciones Físicas, Carrera de Física  
Universidad Mayor de San Andrés  
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8639  
La Paz – Bolivia

(Recibido 26 de Septiembre de 2012; aceptado 7 de Diciembre de 2012)

Se propone un esquema para elegir un potencial cuántico de la forma  $V(x, t) = V(x) - \int dx f(x, t)$  que producirá localización dinámica en una partícula que se mueve en un cristal unidimensional de acuerdo a un hamiltoniano de enlace fuerte. Se usa una fórmula para obtener el potencial efectivo independiente del tiempo  $V_{ef}(x)$  correspondiente a  $V(x, t)$  (Gallinar 2005); dicha fórmula se deduce de la teoría clásica del péndulo de Kapitza para valores grandes de la frecuencia de la fuerza  $f(x, t)$ . Si las soluciones  $x(t)$  de las ecuaciones semiclásicas de movimiento (correspondientes a  $V_{ef}(x)$ ) están confinadas según el teorema de Kroopnick (1972) entonces se propone la conjetura de que confinamiento implica localización cuántica. Se prueba dicha conjetura para algunos potenciales  $V(x, t)$  que obedecen el criterio de Kroopnick y se confirma la conjetura para estos casos. Se examina en particular el caso de los potenciales de la forma  $V(x, t) = xF(t)$  asociados a los fenómenos de localización dinámica.

*Descriptors:* Teorías semiclásicas y aplicaciones — transporte por *hopping* — teoría de transporte  
Código(s) PACS: 03.65.Sq, 72.20.Ee, 72.10.Bg

#### ABSTRACT

We propose a scheme to choose a quantum potential of the form  $V(x, t) = V(x) - \int dx f(x, t)$  that yields dynamic localization of a particle moving in a one dimensional crystal within the tight-binding model. A time-independent effective potential  $V_{ef}(x)$  corresponding to  $V(x, t)$  is obtained by means of a formula deduced from the classical theory of the Kapitza pendulum for large frequencies of the force  $f(x, t)$  (Gallinar 2005). If the solutions  $x(t)$  of the semiclassical equations of motion (corresponding to  $V_{ef}(x)$ ) are confined according to the Kroopnick (1972) theorem then we propose the conjecture that confinement implies quantum localization. This conjecture is confirmed for some potentials  $V(x, t)$  obeying the Kroopnick criterion. We analyze in particular the case of potentials of the form  $V(x, t) = xF(t)$  which are associated to dynamic localization.

*Subject headings:* Semiclassical theories and applications — hopping transport — transport theory

#### 1. INTRODUCCIÓN

Los efectos dinámicos en un sistema físico sujeto a una fuerza externa oscilatoria  $f(t)$  se pueden describir en términos de una energía potencial efectiva independiente del tiempo  $V_{ef}(x)$ . Esta energía potencial se puede calcular según el esquema propuesto originalmente por Pyotr Kapitza cuando la frecuencia de la energía potencial total  $V(x, t)$  es mucho mayor que las frecuencias características del sistema determinadas por la naturaleza de la energía potencial estática  $V(x)$  en ausencia de  $f(t)$ . El esquema de Kapitza fue referido así por primera vez y explicado pedagógicamente por Lev Landau en su conocido texto *Mecánica Clásica* (Lan-

dau & Lifshitz 1985). Este método de usa actualmente en investigaciones más elaboradas con aplicaciones en varios campos (ver por ejemplo: Bandyopadhyay & Dattagupta (2008); Rahav et al. (2003), y las referencias citadas en ambos trabajos).

Lo esencial del método de Kapitza se expone a continuación. Si la fuerza oscilatoria aplicada sobre el sistema físico es  $f(t)$ , entonces la ecuación de movimiento en una dimensión es:

$$m\ddot{x} = -\partial_x V(x) + f(t). \quad (1)$$

La solución de (1) se propone como una suma de  $X(t)$ , que es la solución correspondiente a una energía potencial estática  $V(x)$ , y  $\zeta(t)$ , que es la solución corres-

†sanjines@fiumsua.edu.bo

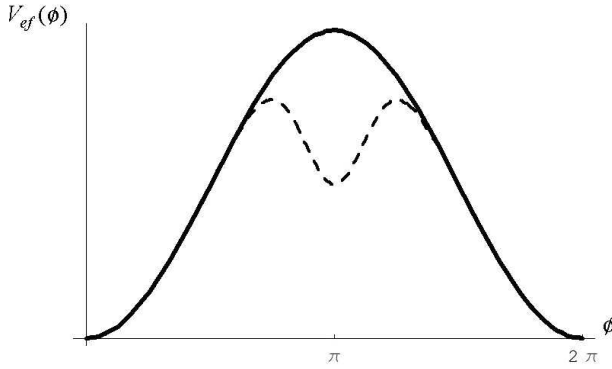


FIG. 1.— Función de energía potencial efectiva  $V_{ef}(\phi)$  para un péndulo de varilla rígida sin masa. Cuando el punto de suspensión del péndulo oscila verticalmente con una frecuencia mucho mayor que la frecuencia natural del péndulo,  $V_{ef}(\phi)$  -representada por la línea segmentada- muestra un valle local correspondiente a la posición de equilibrio estable ( $\phi = \pi$ ). Cuando el punto de suspensión no oscila (línea sólida), la posición  $\phi = \pi$  corresponde al equilibrio inestable.

pondiente a la fuerza oscilatoria  $f(t)$ :

$$x(t) = X(t) + \zeta(t). \quad (2)$$

El método de Kapitza conduce entonces a la energía potencial efectiva

$$V_{ef}(x) = V(x) + \frac{1}{2}m\langle \dot{\zeta}^2 \rangle, \quad (3)$$

donde  $\langle \dot{\zeta}^2 \rangle$  es el promedio temporal (sobre un periodo) de la variación temporal cuadrática de  $\zeta(t)$ .

Un ejemplo típico de los efectos debidos a la fuerza oscilatoria  $f(t)$  es el conocido “péndulo de Kapitza”, i.e., un péndulo de varilla rígida cuyo punto de suspensión oscila rápidamente. En la Fig.1 se ve el perfil de la energía potencial efectiva  $V_{ef}(\phi)$  (línea segmentada) comparado con el perfil de la energía potencial estática  $V(\phi)$  (línea sólida), donde el ángulo  $\phi = 0$  corresponde a la posición de equilibrio estable en ausencia de  $f(t)$ . Así, en presencia de  $f(t) \neq 0$ , la posición del péndulo invertido ( $\phi = \pi$ ) se encuentra en un valle de  $V_{ef}(\phi)$ , lo que indica una posición de equilibrio estable. De lo contrario, si  $f(t) = 0$ , entonces  $V_{ef}(\phi)$  se reduce a la energía potencial estática  $V(\phi)$  con un máximo en  $\phi = \pi$ , lo que corresponde a una posición de equilibrio inestable. Aunque hay muchas referencias sobre el “péndulo de Kapitza”, se destaca Tcherniak (1998) donde se puede elegir los parámetros que corresponden a  $V_{ef}(\phi)$  y ver la simulación del movimiento estable del péndulo en una aplicación *applet*.

## 2. POTENCIAL EFECTIVO PARA EL MODELO DE ENLACE FUERTE

En este trabajo consideraremos el modelo de dinámica de una partícula (o cuasipartícula) en una red cristalina dado por el hamiltoniano de enlace fuerte (Ascroft & Mermin 1976),

$$H = -2A \cos ap + V(x, t), \quad (4)$$

donde  $V(x, t)$  es un operador de energía potencial externa arbitrario aplicado al cristal unidimensional (de-

nominaremos en adelante a  $V(x, t)$  o a  $V(x)$  simplemente “potenciales”). Además, como es usual,  $A$  es el elemento de *hopping* entre los sitios adyacentes del cristal separados por una constante de red  $a$ , y  $p = -i\hbar\partial_x$ . De acuerdo a este modelo dinámico tienen lugar los comportamientos de localización de una partícula referidos como: oscilación de Bloch (Bloch 1928; Hartmann et al. 2004<sup>1</sup>), localización dinámica (Dunlap & Kenkre 1986; Zhao 1991) y localización asintótica (Sanjinés 2001; Dreisow et al. 2011)

La suposición básica comprendida en el modelo de enlace fuerte (4) es que la función de onda  $\Psi(x, t)$  de la partícula se localiza fuertemente en torno a los sitios atómicos del cristal que conforman una red de Bravais (en una dimensión), lo que permite la representación de  $\Psi(x, t)$  como una combinación lineal de funciones de Wannier  $\Phi(x)$  (Ascroft & Mermin 1976):

$$\Psi(x, t) = \sum_n C_n(t)\Phi(x - na). \quad (5)$$

Así, la dinámica de la partícula en la red cristalina está representada por un paquete de ondas cuyo centroide  $z(t)$  y cuyo desplazamiento cuadrático medio  $w(t)$  están dados por:

$$z(t) = \sum_n n|C_n(t)|^2, \quad (6)$$

$$w(t) = \sum_n n^2|C_n(t)|^2. \quad (7)$$

En el caso de que los límites de  $z(t)$  y  $w(t)$  existan cuando  $t \rightarrow \infty$ , entonces se dirá que la partícula está “localizada”. Los casos conocidos de localización referidos antes corresponden a los siguientes potenciales:

Oscilación de Bloch,

$$V(x, t) = \alpha x. \quad (8)$$

Localización dinámica,

$$V(x, t) = \alpha x \cos \omega t \quad (J_0(\alpha/\omega = 0)), \quad (9a)$$

$$V(x, t) = (\varepsilon + \alpha \cos \omega t)x \quad (\varepsilon/\omega \notin \mathbb{Z}). \quad (9b)$$

Localización asintótica,

$$V(x, t) = \alpha xt. \quad (10)$$

Los casos (9a) y (9b), que usualmente son referidos en la literatura científica como localización dinámica AC (Dunlap & Kenkre 1986) y localización dinámica DC + AC (Zhao 1991) respectivamente, se considerarán, entre otros, en este trabajo pues corresponden a la aplicación de una fuerza externa oscilatoria  $f(t)$  en (1) cuyos efectos físicos se pueden estudiar con el método de Kapitza (sección 5). Entre paréntesis en (9a) y (9b) aparecen las condiciones que deben cumplir las fuerzas externas a fin de producir localización.

<sup>1</sup> En esta referencia se da una introducción pedagógica a la dinámica de las oscilaciones de Bloch en 1D; su lista de referencias constituye además una excelente fuente de información actualizada que resume el trabajo de otros investigadores y provee una visión global de estos temas de investigación.

Consideremos a continuación el caso general de los potenciales dependientes del tiempo en (4) que se pueden separar como:

$$V(x, t) = V(x) - \int dx f(x, t), \quad (11)$$

donde  $V(x)$  es independiente del tiempo y  $f(x, t)$  es una fuerza externa que oscila rápidamente con frecuencia  $\omega$  (que se supone mucho mayor que las frecuencias del sistema correspondientes  $V(x)$ ). Así, la aplicación del esquema de Kapitza al hamiltoniano de enlace fuerte (4) permite obtener un potencial efectivo  $V_{ef}$  independiente del tiempo (Gallinar 2005):

$$\frac{1}{m} V_{ef}(x) = \frac{1}{2} a^2 V^2(x) - a^2 E V(x) + \frac{1}{\omega^2 m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2(x)}{n^2}, \quad (12)$$

donde:

$$E = V(x_0) - 2A \cos k_0 a \left( 1 - a^2 \omega^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x_0) n^{-2} \right),$$

$f_n(x)$  es la  $n$ -ésima componente de Fourier de  $f(x, t)$  y  $m = (2Aa^2)^{-1}$  es la masa efectiva de la partícula<sup>2</sup>. En la deducción de (12) se supuso  $f_{-n} = f_n$  y  $f_0 = 0$ .

### 3. APLICACIÓN AL CASO DE LOCALIZACIÓN DINÁMICA DC+AC

Un caso relativamente sencillo de (12) corresponde un campo  $f(x, t)$  armónico con *una sola* componente de Fourier  $f_1$  que no depende de  $x$ . Así, en unidades adimensionales tales que  $ma^2 = 2$ , el potencial efectivo  $V_{ef}(x)$  toma la forma:

$$V_{ef}(x) \xrightarrow{ma^2=2} (V(x) - E)^2 - E^2 + E - V_0, \quad (13)$$

(con  $V_0 \equiv V(x_0)$ ) de donde se despeja

$$V(x) = E \pm \sqrt{V_{ef}(x) + E^2 - E + V_0}. \quad (14)$$

De manera interesante se puede observar que el esquema de Kapitza aplicado al hamiltoniano de enlace fuerte produce dos posibles potenciales estáticos  $V(x)$  correspondientes a un solo potencial efectivo. Esta es una consecuencia directa de la estructura periódica de la red, pues en el límite del continuo

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ A \rightarrow \infty}} Aa^2 = \frac{1}{2m} \quad (15)$$

se obtiene (Gallinar 2005) el resultado conocido para el péndulo de Kapitza (Landau & Lifshitz 1985):

$$V_{ef}(x) = V(x) + \frac{1}{m\omega^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2(x)}{n^2}. \quad (16)$$

<sup>2</sup> La demostración matemática de (12) junto al estudio de los casos semiclásicos para diversos potenciales de interés se incluye en un trabajo en curso que se publicará pronto (*Semiclassical time independent description of tight-binding motion in rapidly oscillating fields*, Martínez L. A., Gallinar J.-P. y Sanjinés D.)

Si aplicamos (13) al caso de localización dinámica DC + AC correspondiente al potencial dado en (9b):  $V(x, t) = \varepsilon x + \alpha x \cos \omega t$ , se obtiene

$$V_{ef} = \varepsilon^2 x^2 - 2E\varepsilon x + const., \quad (17)$$

que es un potencial efectivo cuadrático cuyas consecuencias dinámicas según el modelo semiclásico son conocidas (Chalbaud et al. 1986; Gallinar & Chalbaud 1991).

Examinemos con mayor detalle las consecuencias dinámicas semiclásicas del potencial efectivo en (17). El modelo semiclásico para el hamiltoniano de enlace fuerte (4) con un potencial igual al potencial efectivo  $V_{ef}(x)$  independiente del tiempo, está dado por el conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial k} = 2Aa \sin ak; \quad \dot{k} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -V'_{ef}(x), \quad (18)$$

con las condiciones iniciales  $x(t=0) = x_0$  y  $k(t=0) = 0$ . La ecuación de movimiento correspondiente es

$$\ddot{x} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = a^2 (E - V_{ef}(x)) V'_{ef}(x). \quad (19)$$

La primera integral de (19) es

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\dot{x}_0^2 - a^2 [(V_{ef}(x) - E)^2 - (V_0 - E)^2]}, \quad (20)$$

y la segunda integral de (19) se puede escribir como

$$t(x) = \int dx (C^2 - V_{ef}(x)^2)^{-1/2}, \quad (21)$$

de donde se podría -en principio- despejar  $x(t)$  para conocer la evolución del sistema. No obstante, éste es un problema que en general resulta difícil de resolver.

A continuación reescribamos el potencial cuadrático (o "pozo parabólico")  $V_{ef}(x)$  en (17) como

$$V_{ef}(x) = -\alpha x + \beta x^2; \quad (22)$$

la ecuación de movimiento correspondiente es (con  $z \equiv x - \alpha/2\beta$ )

$$\ddot{z} = 32a^2 z (z_0^2 - z^2) - \omega^2 z, \quad (23)$$

cuya primera integral es

$$\dot{z} = \pm \sqrt{\frac{1}{4} \omega^2 (z_0^2 - z^2) - 8(z_0^2 - z^2)^2}; \quad (24)$$

de aquí resulta que  $z(t)$  es una integral elíptica, ciertamente más difícil de representar analíticamente. Sin embargo, de (24) ya se puede deducir numéricamente el movimiento de la partícula en el espacio fase  $(z, \dot{z})$  que se presenta en la Fig. 2. En esta figura se observa un comportamiento característico de algunos sistemas dinámicos y es el de estar confinado, es decir, que el límite del módulo de  $(z, \dot{z})$  existe cuando  $t \rightarrow \infty$ . Esta observación constituye la base de la propuesta central de este trabajo que se describe en la sección 4.

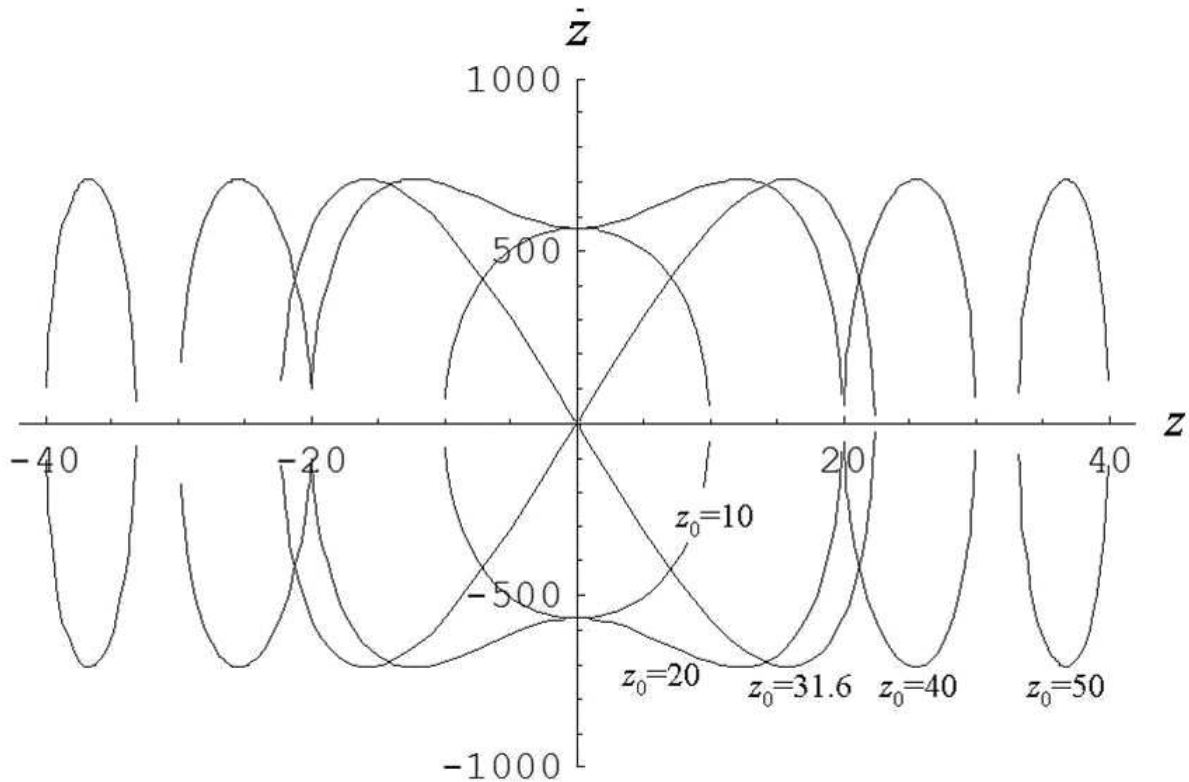


FIG. 2.— Diagrama en el espacio fase  $(z, \dot{z})$  correspondiente a un potencial efectivo cuadrático. El módulo del vector  $(z, \dot{z})$  que describe las órbitas periódicas es finito, lo que se relaciona con el régimen de localización dinámica (9b).

#### 4. CONFINAMIENTO SEMICLÁSICO Y LOCALIZACIÓN DINÁMICA

Definamos un problema matemático general planteado en los siguientes términos: para la ecuación ordinaria autónoma y no-lineal

$$\dot{x} = f(x), \quad (25)$$

¿cuál es la condición de confinamiento para  $x(t)$  dada una  $f(x)$  conocida? Notemos que (25) es equivalente a

$$\ddot{x} = f(x)f'(x), \quad (26)$$

que tiene la forma de una ecuación física de movimiento. La respuesta a la pregunta anterior es el teorema de Kroopnick (Kroopnick 1972): sea

$$\ddot{x} + a(t)b(x) = 0, \quad (27)$$

con  $a(t) > 0$  y  $b(x)$  funciones continuas en  $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$  y en  $\mathbb{R}$  respectivamente. Si  $\dot{a}(t) \leq 0$  (con  $t \geq T$ ) y  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int^x b(u)du = \infty$ , entonces todas las soluciones de (27) están confinadas cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Así, la propuesta (o conjetura) que constituye el objetivo de este trabajo se puede formular como sigue: el fenómeno de localización cuántica se puede relacionar con el correspondiente confinamiento semiclásico, al menos, de tal forma que confinamiento sea una condición suficiente para localización. Dicho de otro modo: a través de la fórmula de Gallinar (12) se puede conocer el potencial cuántico  $V(x)$  en función a un potencial efectivo  $V_{ef}(x)$  que -de acuerdo al modelo semiclásico (18) y al teorema de Kroopnick- producen un movimiento confinado en el espacio fase. No

está dentro del alcance de este trabajo elaborar la demostración esta conjetura, pero se puede argumentar sobre su plausibilidad con ayuda de la Fig.3.

Si bien existe una correspondencia intuitiva entre el centroide  $z(t)$  de un paquete de ondas según (6) y la variable de posición en el modelo semiclásico (18), no existe la equivalencia semiclásica del desplazamiento cuadrático medio  $w(t)$  dado por (7). Sin embargo, en la Fig.3 se ve a un paquete de ondas que se dispersa a medida que se propaga, lo que indica deslocalización cuántica cuando este comportamiento persiste a medida que  $t \rightarrow \infty$ . La imagen semiclásica que podría co-rresponder a esta situación es la siguiente: las posiciones iniciales  $a$  y  $b$  están muy próximas entre sí, como se esperaría estadísticamente si el paquete fuera muy angosto, pero a medida que el sistema evoluciona temporalmente, la dispersión desconfina (ensanchamiento) del paquete indica que las posiciones  $a'$  y  $b'$  estarán muy separadas entre sí, lo que semiclásicamente debería corresponder al caso de un movimiento desconfinado. Si el paquete oscila en un régimen de localización, las posiciones iniciales  $a$  y  $b$  nunca estarán muy separadas entre sí, lo que debería corresponder a un régimen semiclásico de confinamiento.

La adaptación del teorema de Kroopnick al problema semiclásico sigue de manera directa a partir de (27) sustituyendo las variables correspondientes:

$$\ddot{x} + (V_{ef}(x) - E)V'_{ef}(x) = 0. \quad (28)$$

Entonces, si  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V_{ef}^2(x) = \infty$ , todas las solu-

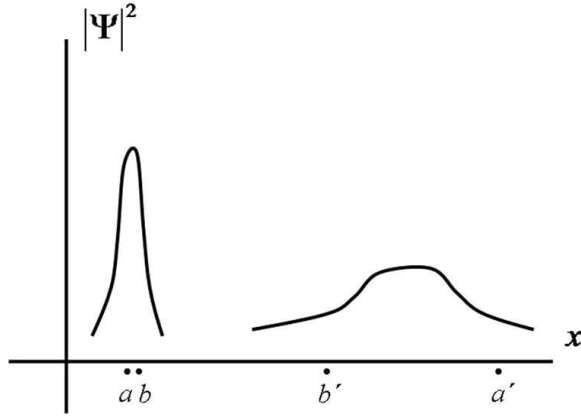


FIG. 3.— Las posiciones iniciales  $a$  y  $b$  de dos partículas clásicas que están próximas entre sí pueden asociarse a una distribución estadística espacial muy angosta (diagrama de la izquierda), pero a medida que el sistema evoluciona temporalmente (diagrama de la derecha), la dispersión desconfiada (ensanchamiento) de la distribución indica que las posiciones  $a'$  y  $b'$  estarán muy separadas entre sí, lo que correspondería al caso de un movimiento desconfinado. Si la distribución oscila en un régimen de localización, las posiciones iniciales  $a$  y  $b$  nunca estarán muy separadas entre sí, lo que correspondería a un régimen de confinamiento.

ciones de (28) están confinadas cuando  $t \rightarrow \infty$ . Así, la consecuencia inmediata del teorema de Kroopnick de acuerdo a (14) y a (28) se traduce en la condición  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |V(x)| = \infty$  para localización. Para ilustrar esto elijamos algunos casos representativos de  $V(x)$  correspondientes al potencial cuántico

$$V(x, t) = V(x) + x \cos 100t. \quad (29)$$

Los casos elegidos de  $V(x)$  son:

$$x^2 \quad (30a)$$

$$50\sqrt{|x|^3}, \quad (30b)$$

$$100\sqrt{|x|}, \quad (30c)$$

$$x^3, \quad (30d)$$

$$50|x|, \quad (30e)$$

$$e^{|x|}, \quad (30f)$$

$$e^x, \quad (30g)$$

$$(x^2 + 1)^{-1}, \quad (30h)$$

Los gráficos correspondientes a estos potenciales para el desplazamiento cuadrático medio  $w(t) = \langle x^2 \rangle$ , calculado de acuerdo a (7) resolviendo numéricamente la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo por el método pseudo-espectral (Sanjinés 2001), se muestran en la Fig.4.

Las curvas que indican claramente deslocalización corresponden a los potenciales (30 g, h). En efecto, para estos potenciales se verifica que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |V(x)| \neq \infty$ , mientras que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |V(x)| = \infty$  para los demás potenciales, cuyos gráficos de  $\langle x^2 \rangle$  indican localización. Esto sólo se puede afirmar para los intervalos temporales tomados en las simulaciones numéricas.

Nótese la consistencia de los resultados de la Fig.4 con los que corresponden al hamiltoniano de una partícula en el límite del continuo dado en (15), con un potencial igual al potencial efectivo calculado según (12), i.e.,  $H = -(\hbar^2/2m)\partial_x^2 + V_{ef}(x)$ . En este caso, la condición de localización de la partícula para un valor determinado (finito) de la energía es  $E < \lim_{|x| \rightarrow \infty} V_{ef}(x)$  (Sakurai & Napolitano 2011). En efecto, de acuerdo a (13) se ve que en todos los casos de localización en la Fig. 4 se cumple  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V_{ef}(x) = \infty$ .

## 5. CASO GENERAL DEL POTENCIAL LINEAL

En vista del interés que comprende este trabajo acerca de los potenciales (9a) y (9b) correspondientes al régimen de localización dinámica, consideremos a continuación el caso general del potencial (11) con la forma de una función lineal de la posición:

$$V(x, t) = V(x) - \int dx f(x, t) = xF(t), \quad (31)$$

donde el promedio temporal de  $F(t + T) = F(t)$  sobre un periodo  $T$  es cero, i.e.,  $\langle F \rangle_T = 0$ , de manera consistente con la suposición  $f_0 = 0$  en la deducción de la fórmula de Gallinar (12). La segunda derivada de (31) con respecto a la posición es

$$\partial_x^2 V(x) = e^{i\omega t} \partial_x f_1(x) + e^{2i\omega t} \partial_x f_2(x) + \dots \quad (32)$$

donde se ve que el lado derecho de (32) no puede depender de  $t$ , así que necesariamente  $\partial_x f_n = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), entonces  $f(x, t) = f(t)$  en (31) y por lo tanto  $V(x) = bx$ , con  $b$  una constante de proporcionalidad. En este caso, (12) lleva a la misma forma simplificada de (13):  $V_{ef}(x) = (bx - E)^2 - E^2 + E - V_0$ . El valor de la constante  $b$  se determinará según los casos conocidos de localización dinámica dados por (9a) y (9b) cuyos potenciales son lineales en  $x$ . Veamos: el criterio de Kroopnick para localización es  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V_{ef}^2(x) = \infty$ ; en el caso de (9a),  $V(x, t) = ax \cos \omega t$ , la condición de localización  $J_0(a/\omega) = 0$  no se cumple cuando  $\omega$  es grande, así que el criterio de Kroopnick tampoco se cumplirá, lo que es cierto si  $b = 0$ , i.e.,  $V_{ef}(x) = 0$ ; en el caso de (9b),  $V(x, t) = (e + a \cos \omega t)x$ , la condición de localización  $\varepsilon/\omega \notin \mathbb{Z}$  se cumple cuando  $\omega$  es grande, entonces  $V(x, t)$  se debe escribir como  $V(x, t) = \varepsilon x + F(t)x$  con  $\langle F \rangle_T = 0$ , de tal forma que  $V_{ef}(x) = (\varepsilon x - E)^2 - E^2 + E - V_0$  y que en consecuencia se cumpla el criterio de Kroopnick  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V_{ef}^2(x) = \infty$ . Resumiendo: si  $V(x, t) = xF(t)$  con  $\langle F \rangle_T = 0$ , entonces  $V_{ef}(x) = 0$ . Esta conclusión podría haberse intuido de manera simple estableciendo que el potencial efectivo correspondiente a un potencial  $V(x, t)$  que oscila rápidamente es el promedio temporal de  $V(x, t)$ , i.e.,  $V_{ef}(x) = \langle V(x, t) \rangle_T = x \langle F \rangle_T = 0$ .

Un caso interesante en el que se confirma lo anterior corresponde a la simulación numérica de los efectos dinámicos derivados de un campo eléctrico homogéneo con dependencia temporal del tipo "diente

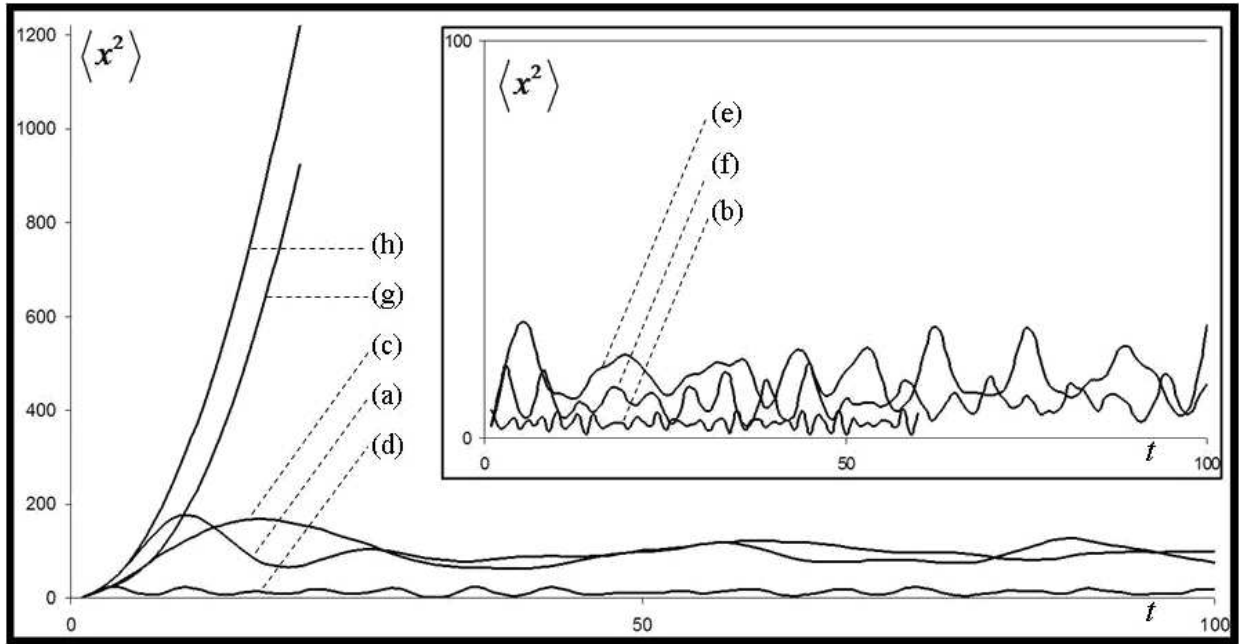


FIG. 4.— Evolución de valores de  $\langle x^2 \rangle$  como indicador de localización dinámica. Los casos (a)-(f) corresponden a localización pues  $\langle x^2 \rangle$  permanece acotado. Los casos (g) y (h) muestran la tendencia de  $\langle x^2 \rangle$  a crecer monótonamente de manera desacotada, lo que se interpreta, dentro de los valores extremos alcanzados en esta gráfica, como deslocalización.

de sierra" de la forma (31) con  $\langle F \rangle_T \neq 0$ , i.e.,  $E(t) \propto t - nt$  con  $t \in [nT, (n+1)T]$  y  $n$  entero (Sanjinés 2003). Aunque a corto plazo (tiempos pequeños) parecería haber un régimen de deslocalización asociado al transporte neto de una corriente eléctrica, finalmente la localización predicha por el criterio de Kroopnick se impone para tiempos mayores.

## 6. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Se utilizó la fórmula de Gallinar (2005) aplicable al movimiento de una partícula en una red unidimensional con un hamiltoniano de enlace fuerte. Dicha fórmula permite obtener el potencial efectivo independiente del tiempo  $V_{ef}(x)$  correspondiente a un potencial de la forma  $V(x, t) = V(x) - \int dx f(x, t)$ , donde la fuerza externa  $f(x, t)$  oscila rápidamente con respecto a las oscilaciones que puedan resultar del potencial estático  $V(x)$ , lo que permite aplicar el esquema de Kapitza para oscilaciones rápidas en la deducción de  $V_{ef}(x)$ . En este trabajo se propuso la conjetura "confinamiento implica localización" (sólo como condición suficiente), es decir, que si la solución  $x(t)$  de las ecuaciones semiclásicas de movimiento para un hamiltoniano de enlace fuerte con potencial  $V_{ef}(x)$  permanecen acotadas en el límite  $t \rightarrow \infty$ , entonces también se satisfarán las condiciones de localización cuántica, i. e., el centroide  $z(t)$  y el valor cuadrático medio  $w(t)$  de un paquete cuántico permanecerán acotados cuando  $t \rightarrow \infty$ . Así, aplicando el teorema de Kroopnick (1972), la condición de localización sugerida por dicha conjetura es  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V_{ef}^2(x) = \infty$ . Se aplicó este criterio a varios potenciales estáticos  $V(x)$  no-lineales (Fig. 4), así como al caso del potencial lineal general del tipo  $V(x, t) = xF(t)$  asociado a los fenómenos de localización dinámica especificados por

las ecs. (9a) y (9b). En todos los casos se logró verificar la conjetura "confinamiento implica localización". Como ejemplo interesante, se invocó el resultado de los efectos dinámicos debidos a un campo eléctrico homogéneo con dependencia temporal del tipo "diente de sierra", los que indican un efecto aparente de deslocalización para tiempos pequeños (asociado al transporte neto de una corriente eléctrica), pero que a través del criterio  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V_{ef}^2(x) = \infty$  dicho efecto corresponde en realidad a un régimen de localización, lo que se verifica para tiempos mayores. Estos ejemplos ilustrativos muestran la necesidad de contar con un criterio general, como el que se obtuvo en este trabajo, que permita saber si un régimen dinámico es de localización o deslocalización independientemente de los resultados de las simulaciones numéricas que necesariamente estarán limitados por los valores máximos de los tiempos de simulación.

Finalmente, mencionemos algo respecto a la relevancia de este trabajo en el contexto de investigaciones actuales que son de interés a la comunidad científica. A partir de la "ecuación óptica de Schrödinger" (Marte & Stenholm 1997) se estableció la posibilidad de reproducir los fenómenos de transporte electrónico en redes (heteroestructuras de semiconductores en 1D) en arreglos bidimensionales de fibras ópticas con perfiles de curvatura específicos. Tal posibilidad surge como consecuencia de la analogía formal entre la variable temporal en la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo (para la partícula en una red) y la variable espacial en la "ecuación óptica de Schrödinger" a lo largo del eje longitudinal del arreglo óptico (para el paquete de ondas fotónico). Así, los fenómenos dinámicos cuánticos de la partícula en una red son "mapeados" a lo largo del arreglo óptico en los que se observa una dis-

tribución *estática* de intensidad luminosa. Como consecuencia, el fenómeno bien conocido de la oscilación de Bloch corresponde a la distribución periódica de intensidad luminosa en un arreglo óptico con perfil de curvatura parabólica (Lenz 1999). El fenómeno de localización dinámica de un electrón en presencia de un campo armónico externo (Dunlap & Kenkre 1986) fue verificado experimentalmente en un arreglo óptico con perfil de curvatura periódico (Longhi et al. 2006) y el fenómeno de localización asintótica predicho teóricamente (Sanjinés-Gallinar 2001) fue confirmado experimentalmente en un arreglo óptico con perfil de curvatura cúbica (Dreisow et al. 2011).

Así, en el caso de la dinámica de la partícula en una red bajo el efecto de un campo eléctrico externo con dependencia temporal armónica en el límite de altas fre-

cuencias (ec. 12), corresponde entonces la distribución de intensidad luminosa en un arreglo óptico con curvatura periódica de periodo muy pequeño. Los resultados de este trabajo permiten pues dos predicciones en arreglos ópticos (investigación en curso): (i) en el límite del periodo igual a cero ocurriría deslocalización del paquete fotónico; (ii) en el límite del periodo igual a cero y *curvatura global cuadrática* (no-periódica) del arreglo óptico habrá localización del paquete fotónico. La predicción (i) no es factible en vista de que la deslocalización óptica no es compatible con aproximación paraxial que se supuso en la deducción de la "ecuación de Schrödinger óptica" (Marte & Stenholm 1997). Sin embargo, la predicción (ii) es factible y puede ser verificada experimentalmente con las mismas técnicas que permitieron la observación de localización dinámica y localización asintótica.

#### REFERENCIAS

- Ascroft N. & Mermin N. (1976), *Solid State Physics* (Saunders College)
- Bandyopadhyay M. & Dattagupta S. (2008), *Pramana - journal of physics* **70**, 3, 381
- Bloch F. (1928), *Physik* **52**, 555
- Chalbaud E. et al. (1986), *J. Phys. A* **19**, L385
- Dreisow F. et al. (2011), *Optics Letters* **36**, 11, 2065
- Dunlap D. H. & Kenkre V. M. (1986), *Phys. Rev. B* **34**, 3625
- Gallinar J. P. & Chalbaud E. (1991), *Phys. Rev. B* **43**, 2322
- Gallinar J. P. (2005), (comunicación personal)
- Hartmann T. et al. (2004), *New Journal of Physics* **6**, 2
- Kroopnick A. (1972), *Proc. Amer. Math. Soc.* **34**, 319
- Landau L. & Lifshitz E. (1985), *Mecánica Clásica* (Reverté)
- Lenz G. (1999), *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5, 963
- Longhi S. et al. (2006), arXiv:quant-ph/0511132v2 29 Jun 2006
- Marte M. & Stenholm S. (1997), *Phys. Rev. A* **56**, 4, 2940
- Rahav S., Gilary I. & Fishman S. (2003), arXiv:nlin/0302023v2 14 Sep 2003
- Sakurai J. & Napolitano J. (2011), *Modern Quantum Mechanics* - cap. 2 (Addison-Wesley)
- Sanjinés D. (2001), *Tesis Doctoral* (Universidad Simón Bolívar, Venezuela)
- . (2003), *Revista Boliviana de Física* **9**, 18
- Tcherniak D. (1998), <http://www.fam.web.mek.dtu.dk/fvp/dima/VibPotential.html>
- Zhao X. G. (1991), *Phys. Lett.* **155A**, 299