

ESTUDIO DE DOS CIRCUITOS CAÓTICOS

G. Conde S., G. M. Ramírez A.

Carrera de Física—U.M.S.A.

La Paz—Bolivia

RESUMEN

Se describe el proceso para caracterizar numéricamente un circuito autónomo tipo Chua (compuesto por dos capacitores, una bobina, una resistencia y el diodo de Chua), seguido de una verificación experimental y una comparación cualitativa con un circuito no autónomo R-L-diodo. Manteniendo el parámetro de control $\alpha = C_2/C_1$ fijo y aumentando los valores de $\beta = R^2C_2/L$ y $\gamma = Rr_0C_2/L$, según el modelo de Chua, el sistema presenta estados en el siguiente orden: divergencia (inestabilidad), caos (con ventanas periódicas) y finalmente periodicidad con tendencia a un punto fijo. En el laboratorio, el comportamiento es similar, sólo que en vez de divergencia se tiene un ciclo límite de primer orden, luego la región caótica a veces contiene ventanas periódicas y finalmente se presentan ciclos límite de segundo y primer orden terminando en un punto fijo. Experimentalmente, el parámetro de control fue la resistencia y los componentes más importantes para obtener caos fueron: $C_1 = 10$ pF y $L=1$ mH ($r_0 = 21.4 \Omega$); C_2 podía tomar valores desde 1.5 nF hasta 47 nF, y R desde 0Ω hasta 2 k Ω . A pesar de no haberse obtenido la correspondencia esperada entre resultados experimentales y numéricos, se obtuvo el mismo comportamiento y atractores extraños característicos del sistema. Por otro lado, se trabajó con un circuito no autónomo compuesto por $R = 51.2 \Omega$, $L=470 \mu\text{H}$ y un diodo normal. Este sistema presentó desdoblamiento de periodo y ventanas periódicas. Los parámetros de control fueron: la amplitud del voltaje y la frecuencia de la fuente, con ellas se calculó la primera constante de Feigenbaum. Para la segunda constante, se encontró mayor dificultad debido a la precisión con la que fueron medidos los valores del voltaje en el diodo. Se concluye que los atractores de ambos circuitos dependen de la forma de la función característica del elemento no lineal y presentan bifurcaciones según la variación de la amplitud a una frecuencia crítica. Un estudio más completo puede realizarse utilizando una interfase y analizando el espectro de potencias de las señales de ambos circuitos, además de implementar un modelo teórico en el último. Se ha visto que estos circuitos son de fácil construcción de modo que pueden ser introducidos como herramientas didácticas para el estudio de fenómenos no lineales.

Descriptor: Circuitos Electrónicos, Caos, Atractores Extraños.

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de los fenómenos no lineales en nuestro medio ha tomado un aspecto teórico en su mayoría, y poco a poco ha crecido el interés por servirse de sus herramientas y aplicarlas en una variedad de áreas. En especial, los atractores extraños son considerados como abstracciones que solamente se observan en libros o en simulaciones y el caos, da la impresión de presentarse solamente en sistemas muy grandes como los sociales o biológicos. Sin embargo, estos fenómenos pueden observarse en sistemas de fácil construcción y manejo. Una forma de llegar a este propósito es mediante la electrónica, que desde principios del siglo pasado, ha reportado circuitos con comportamientos “inusuales” y desde entonces se han realizado varios estudios rigurosos e investigaciones, desarrollándose aplicaciones en la tecnología de comunicaciones y proponiéndose nuevas aplicaciones incluso en la medicina. Existen varios circuitos electrónicos que al

contener un elemento no lineal presentan comportamientos irregulares, uno de ellos es el circuito autónomo tipo Chua, planteado por el ingeniero electrónico chino León Chua en 1971. Si bien fue planteado en ese año, la primera evidencia de caos en este circuito fue en 1983 por simulación, realizado por T. Matsumoto [1] y la primera evidencia experimental de caos fue realizado por Zhong y Ayron en 1984 [2], posteriormente, se presentó un trabajo con pruebas rigurosas de la familia entera de atractores caóticos de este circuito [3]. Finalmente, el circuito ha formado parte de la base para investigaciones en sincronización caótica y otras variedades incluyendo aplicaciones en la encriptación de señales [4], [5], [6].

Por otra parte, un circuito RLC con un capacitor variable como elemento no lineal y una fuente de voltaje sinusoidal fue descrito por Paul Linsay en 1981, encontrando que el sistema experimental daba resultados concordantes con la teoría de sistemas no lineales [7].

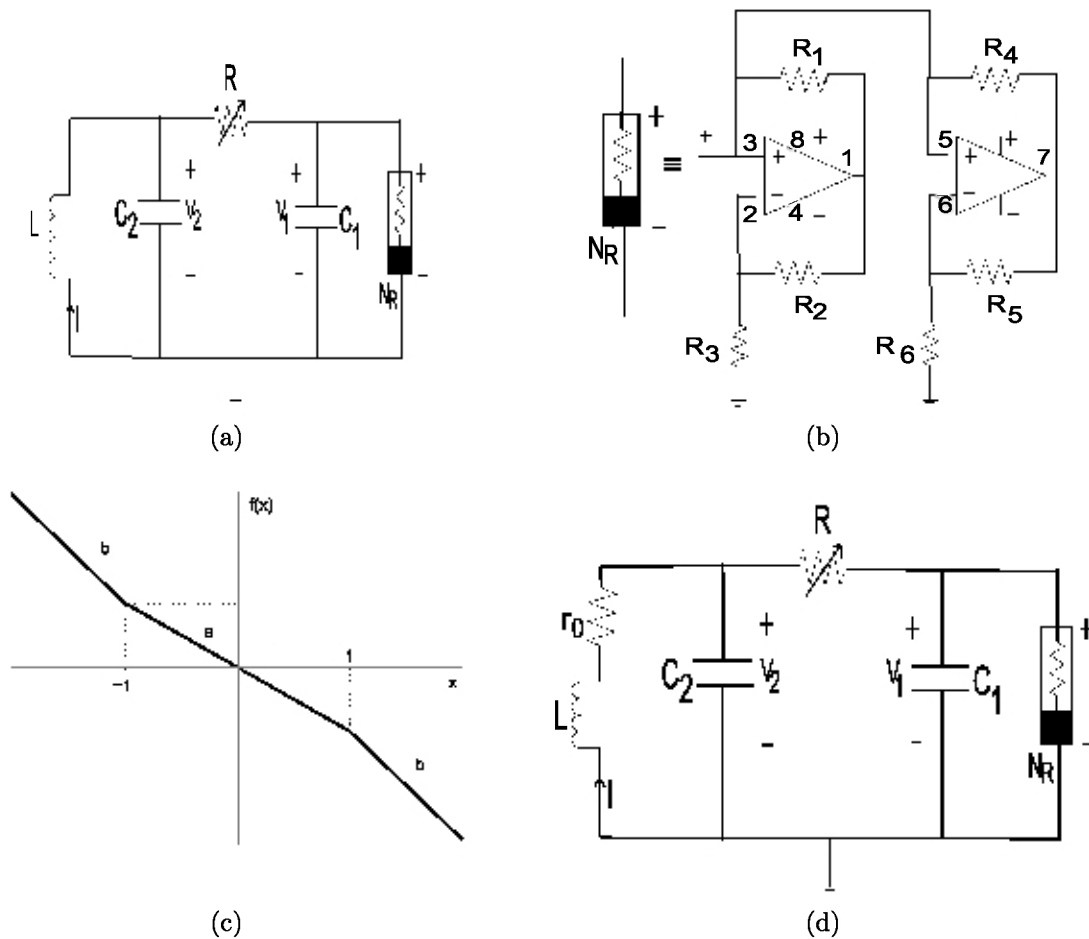


Figura 1. (a) El circuito de Chua con dos parámetros: $\alpha = C_2/C_1$, $\beta = R^2C_2/L$. (b) El diodo de Chua compuesto de dos amplificadores operacionales y resistencias $R_1 = R_2 = 220 \Omega$, $R_3 = 1.8 \text{ k}\Omega$, $R_4 = R_5 = 22 \text{ k}\Omega$, $R_6 = 3.3 \text{ k}\Omega$. (c) Función característica adimensional del diodo de Chua con pendientes $a = -1.22$ y $b = -0.728$. (d) El circuito de Chua considerando la resistencia interna de la bobina tiene tres parámetros: $\alpha = C_2/C_1$, $\beta = R^2C_2/L$, $\gamma = r_0RC_2/L$.

Desde entonces se realizaron modificaciones y estudios de este sistema, buscando las verdaderas causas de la no linealidad, mas aplicaciones específicas aún no se han encontrado.

Debido al interés por estudiar y observar fenómenos no lineales como el caos y la ruta que nos lleva hacia él, se pretende caracterizar numéricamente el circuito tipo Chua y realizar observaciones en el osciloscopio a manera de una verificación experimental. Por otro lado, se pretende realizar una comparación cualitativa, con un circuito no autónomo compuesto por una fuente de voltaje alterna, una resistencia, una bobina y un diodo normal.

2. EL CIRCUITO TIPO CHUA

Este circuito se caracteriza principalmente por dos aspectos: primero, es autónomo, es decir, no está alimentado por fuentes de corriente alterna y segundo, está compuesto por dos partes: una parte que presenta un comportamiento típico de un oscilador amortiguado (dos condensadores, una resistencia y una bobina) y la otra parte que constituye el único elemento no lineal denominado *diodo de Chua*. Este elemento causante de la no linealidad actúa como la fuente de energía de todo

el circuito, se ocupa de retroalimentarlo y lo mantiene oscilando (ver figura 1a).

El circuito tipo Chua se describe mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dV_1}{dt} &= \frac{V_2 - V_1}{R} - f(V_1) \\ C_2 \frac{dV_2}{dt} &= \frac{V_1 - V_2}{R} + I \\ L \frac{dI}{dt} &= -V_2, \end{aligned} \quad (1)$$

donde la función del diodo de Chua: $f(V_1) = m_b V_1 + \frac{1}{2}(m_a - m_b)[|V_1 + B| - |V_1 - B|]$ tiene pendientes negativas m_a, m_b y un punto de ruptura dependiente del voltaje de saturación del amplificador operacional B . Estas expresiones están en función de los valores de componentes en el circuito del modo siguiente:

$$m_a = -\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_6}, \quad m_b = -\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}, \quad B = \frac{R_5 E_{sat}}{R_5 + R_6}.$$

El diodo de Chua, básicamente, contiene dos amplificadores operacionales con un juego de seis resistencias, el

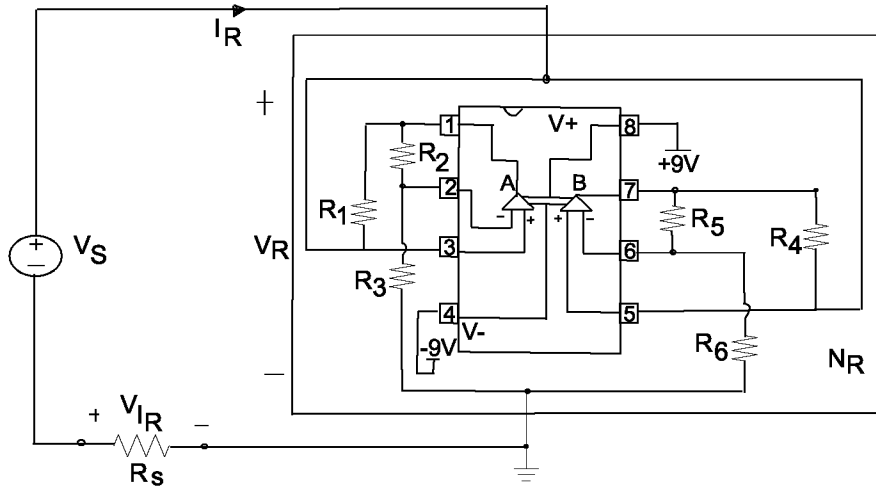


Figura 2. Arreglo experimental para medir la curva característica del diodo de Chua. Se aplica un voltaje V_S de una función sinusoidal al circuito en serie compuesto por la resistencia sensible R_s y el diodo N_R . El TL082 fue alimentado por ± 15 V.

arreglo se observa en la figura 1b. Los valores adecuados para presentar no linealidad fueron determinados en [8] y son una variación de los valores propuestos inicialmente por J. M. Kennedy [9]. La función $f(V_1)$ de este diodo se caracteriza por una curva V-I no lineal compuesta por tres rectas con pendiente negativa y un arreglo experimental para su obtención se sugiere en [10].

El modelo de Chua se presenta en forma adimensional introduciendo los términos siguientes:

$$x = \frac{V_1}{B}, y = \frac{V_2}{B}, z = \frac{R}{B}I, a = m_a R, \\ \alpha = \frac{C_2}{C_1}, \beta = \frac{R^2}{L}C_2, \tau = \frac{t}{RC_2}, b = m_b R. \quad (2)$$

Entonces, se tiene un sistema de tres ecuaciones diferenciales que en principio depende de dos parámetros α y β . Pero, considerando la resistencia intrínseca r_0 de la bobina (ver figura 1d), se introduce un tercer parámetro $\gamma = \frac{r_0}{L}RC_2$ al sistema de ecuaciones (3).

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(y - x - f(x)) \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z \\ \frac{dz}{dt} = -\beta y - \gamma z. \quad (3)$$

La forma adimensional de la función del diodo de Chua es $f(x) = bx + \frac{1}{2}(a-b)(|x+1| - |x-1|)$, la cual se muestra en la figura 1c. Se utilizaron los valores sugeridos para $a = -1,22$ y $b = -0,728$ [8].

2.1. Obtención Experimental de la Función Característica del Diodo de Chua

Se construyó el arreglo experimental que se observa en la Fig. 2 en el que el diodo de Chua compuesto por el amplificador operacional doble TL082 conectado a sus correspondientes seis resistencias: $R_1 = R_2 = 220 \Omega$,

$R_3 = 1.8 \text{ k}\Omega$, $R_4 = R_5 = 22 \text{ k}\Omega$, $R_6 = 3.3 \text{ k}\Omega$, se encuentra en serie con una resistencia sensible $R_s = 1 \text{ k}\Omega$. El sistema fue alimentado por el voltaje V_S de un generador de funciones GFG-8016G y el TL082 por una fuente simétrica de 15 V. Se realizaron pruebas con baterías de 9 V y con fuentes de 12 V y de 10 V, en especial esta última porque inicialmente se había trabajado con ella y se habían encontrado aparentes atractores extraños. Todas las observaciones se realizaron con un osciloscopio digital Jimatsu SS-8421.

La resistencia sensible R_s fue utilizada para medir la corriente I_R que fluye por el diodo cuando se aplica un voltaje V_R a sus terminales. Por comodidad se escogió el valor de $R_s = 1 \text{ k}\Omega$ pues $V_{I_R} = -I_R$ e I_R está dado en [mA].

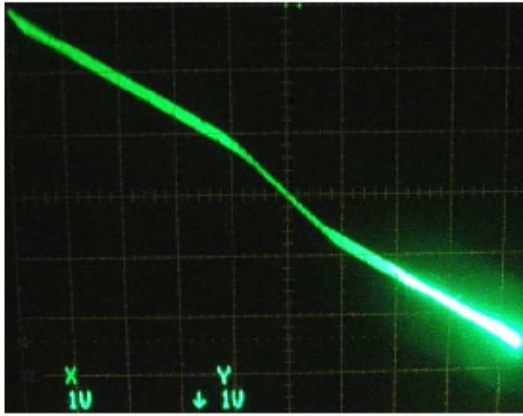
Se obtuvo la curva característica del diodo aplicando el voltaje de fuente V_S , conectando V_{I_R} al canal Y del osciloscopio y V_R al canal X y observando en el modo X-Y. Como sabemos que $V_{I_R} \propto -I_R$, entonces, para obtener la curva exacta: I_R vs. V_R , se invirtió la entrada de Y.

Los resultados obtenidos se muestran en la Fig. 3 Se observa la curva característica de tres segmentos para 31 Hz de frecuencia, 3.480 V de amplitud de voltaje de la fuente y ± 15 V de voltaje de alimentación para los amplificadores del diodo. Además, se probó que la fuente de 10 V, tenía mucho ruido, y fue descartada junto con la fuente de 12 V porque también era ruidosa. Al final, se decidió realizar el trabajo experimental con la fuente de 15 V y observar cómo afectaban las baterías de 9 V.

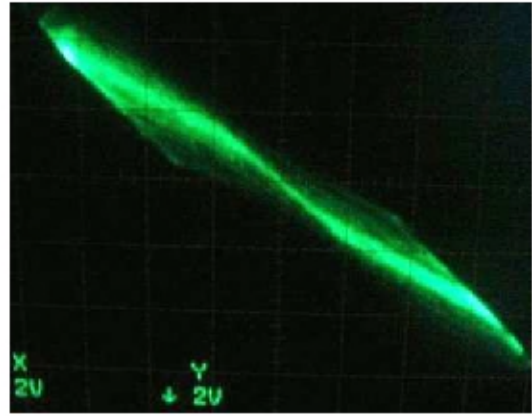
3. ESTUDIO CUALITATIVO DEL CIRCUITO

3.1. Atractores periódicos y caóticos

El sistema no lineal de Chua, presenta cambios de estado según varíe el conjunto de parámetros $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ y las condiciones iniciales $\{x_0, y_0, z_0\}$. A las representaciones gráficas de estos resultados en el espacio de fases las llamamos trayectorias y se pueden tener los siguientes casos:



(a) Fuente de 15 V.



(b) Fuente de 10 V.

Figura 3. Curvas características I vs. V del diodo de Chua. Se observa que la fuente de 10 V es muy ruidosa.

- *Puntos fijos.* Es el caso más sencillo que representa un estado estacionario del sistema. En la serie temporal se presenta una función continua.
- *Ciclos límite.* O puntos periódicos representan un estado oscilatorio del sistema y todas las trayectorias pasan una y otra vez por su propio valor inicial trazando una curva cerrada. En la serie temporal se observa una función periódica.
- *Casi-periodicidades.* Representan la superposición de estados oscilatorios con periodos distintos y el espacio más apropiado para trazar estas trayectorias es el toroide. En la serie temporal se presenta como una función modulada.

Hasta este punto los casos vistos se denominan periodicidades.

- *Atractores Extraños.* Este es otro caso posible que corresponde a estados aperiódicos. Una de las características de un atractor extraño es que en el espacio de fases existe un proceso llamado “stretching and folding” (estirar y doblar), lo que significa que en las trayectorias se produce una especie de estiramiento y luego un plegado sin que ellas se intersecten. Los atractores extraños son las representaciones en el espacio de fases de sistemas caóticos.

De este modo, un sistema podría sufrir cambios de acuerdo a los parámetros que se utilicen. Estos cambios cualitativos se denominan *bifurcaciones* y los puntos donde ocurren estos cambios se denominan *puntos de bifurcación*. Estas bifurcaciones podrían desembocar en comportamientos caóticos, los cuales se definen como comportamientos irregulares de un sistema determinista muy sensible a las condiciones iniciales [11].

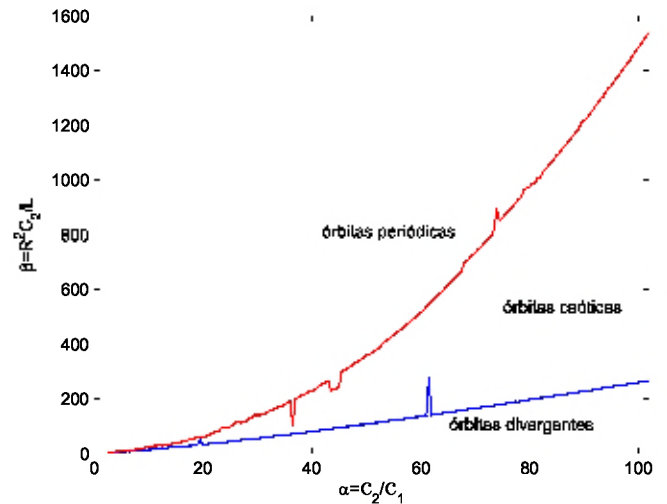


Figura 4. Caracterización del circuito tipo Chua con dos parámetros.

3.2. Metodología y Resultados para la Caracterización del Circuito Tipo Chua Considerando Dos Parámetros

Se comenzó resolviendo numéricamente el sistema de Chua mediante un programa en Matlab, en el cual los valores a ser introducidos fueron las condiciones iniciales: $[x_0, y_0, z_0] = [0.1, 0.15, 0.01]$, el tiempo de integración: $t = 1500$, los valores de las pendientes: $a = -1,22$, $b = -0,728$ y en principio, los parámetros: α y β , los cuales son variados.

Se realizó un estudio cualitativo del sistema, esto significa que se observaron las trayectorias en el espacio de fases. Lo primero que se hizo fue elegir un valor de α y variar el valor de β . De este modo se encontraron los límites de β , observando si la representación en el espacio de fases era un atractor extraño para el α elegido. Luego,

TABLA 1

Límites caóticos para la caracterización del sistema de Chua con dos parámetros.

α	β	α	β	α	β	α	β	α	β
2.5	2.6-3	23	39.7-84.8	43.5	89.9-229.8	64	147.6-594.6	84.5	210.1-1074.9
3	3.2-3.9	23.5	40.8-94	44	91.2-235	64.5	149.1-604.4	85	213.7-1089.2
3.5	3.9-4.7	24	42-94.4	44.5	93-237.5	65	150.9-614.8	85.5	214-1098.1
4	4.5-6.5	24.5	42.9-94.6	45	94.1-242.1	65.5	152.1-624.8	86	215.3-1113.3
4.5	5.2-6.9	25	44.2-97.9	45.5	95.4-297.6	66	153.6-634.7	86.5	217-1124.4
5	5.9-8.1	25.5	45.4-105	46	96.8-304.5	66.5	154.9-644.9	87	218.2-1135.6
5.5	6.6-9.2	26	46.4-111.8	46.5	98.1-310.7	67	156.5-654.8	87.5	219.9-1149
6	7.3-10.5	26.5	47.7-114.8	47	99.5-317.6	67.5	158.1-664.2	88	221.2-1161.5
6.5	8.1-12.2	27	48.6-112.8	47.5	100.8-323.9	68	159.3-695	88.5	223.1-1172.9
7	8.8-12.6	27.5	49.9-115.9	48	102.3-330.6	68.5	161-705.1	89	224.9-1186.1
7.5	9.6-13.9	28	51.2-119.6	48.5	103.3-337.5	69	164.2-715	89.5	226.6-1206
8	10.4-16.6	28.5	52.3-128.5	49	105.2-341.6	69.5	164.2-724.6	90	228.1-1215.8
8.5	11.2-16.5	29	53.6-131	49.5	106.2-351.2	70	165.5-734.6	90.5	229.9-1224.9
9	12.1-17.7	29.5	54.8-140.1	50	107.7-358.3	70.5	167-744.5	91	230.6-1237.1
9.5	12.9-22.5	30	55.8-140.4	50.5	109.4-360	71	168.4-754.4	91.5	232.7-1252.1
10	13.7-24	30.5	57.1-141.3	51	110.8-366.9	71.5	170.2-764.4	92	233.8-1264.8
10.5	14.6-26.6	31	58.2-144.1	51.5	112.1-373.8	72	171.9-774.5	92.5	235.5-1279.1
11	15.5-28.7	31.5	59.4-148.4	52	113.6-382.2	72.5	173.4-784.8	93	237.2-1292.6
11.5	16.4-29	32	60.6-153.7	52.5	114.8-388	73	174.8-795	93.5	238.9-1302.5
12	17.3-30.7	32.5	62.2-158	53	116.1-401.8	73.5	176-817.6	94	241.1-1318.4
12.5	18.2-28.9	33	63.1-162	53.5	117.7-409.7	74	177.6-893.7	94.5	242.1-1332.9
13	19.1-31.4	33.5	64.4-166.7	54	119.4-416.8	74.5	179-849.6	95	242.9-1342.9
13.5	20.1-32.6	34	65.5-171	54.5	120.6-423.1	75	180.4-860.6	95.5	245.2-1357.1
14	30.4-34.1	34.5	66.9-173.6	55	122.1-432.7	75.5	182.3-871.5	96	246.8-1370.5
14.5	22-36.5	35	68-179.3	55.5	123.9-441.3	76	184.1-882.6	96.5	248.5-1383.9
15	23-38.7	35.5	69.2-185.5	56	124.9-448	76.5	185.3-893.9	97	249.9-1398.2
15.5	23.9-40.5	36	70.3-190.1	56.5	126-455.7	77	187.1-904.8	97.5	251.3-1412
16	24.9-43	36.5	71.7-195.2	57	127.4-463.7	77.5	188.7-915.9	98	253.4-1426.5
16.5	26-44	37	73-198.7	57.5	129.1-471.9	78	189.9-928.3	98.5	255.1-1438.4
17	27-47.1	37.5	74.3-205.5	58	130.6-481.1	78.5	191.2-939.5	99	256.1-1454.1
17.5	27.9-54	38	75.4-210.2	58.5	131.7-488.6	79	193.3-961	99.5	258.3-1468.1
18	28.9-52.8	38.5	76.7-215.4	59	133.2-496.4	79.5	194.9-972.9	100	259.7-1482.5
18.5	29.9-55.6	39	78.1-220.6	59.5	134.2-506	80	196.1-974	100.5	261.6-1496.5
19	31-58	39.5	79.4-226	60	136.1-515.6	80.5	197.9-985.1	101	262.3-1511.2
19.5	48.9-60	40	80.7-228	60.5	137.8-523.9	81	199.3-989.7	101.5	264.8-1525.5
20	33.1-62	40.5	81.9-231.8	61	138.8-535	81.5	200.9-1005	102	267-1539.9
20.5	34.2-63.6	41	83.3-242.3	61.5	274.3-544.9	82	202.8-1006.5		
21	35.2-67.8	41.5	84.7-248.5	62	141.6-554.9	82.5	204.5-1029.3		
21.5	36.3-70.2	42	86-255.1	62.5	143.2-564.9	83	205.6-1041.1		
22	37.4-76.4	42.5	87.3-260.1	63	144.6-574.7	83.5	207.3-1053		
22.5	38.6-78.9	43	88.6-266.3	63.5	146.2-584.6	84	208.5-1064.1		

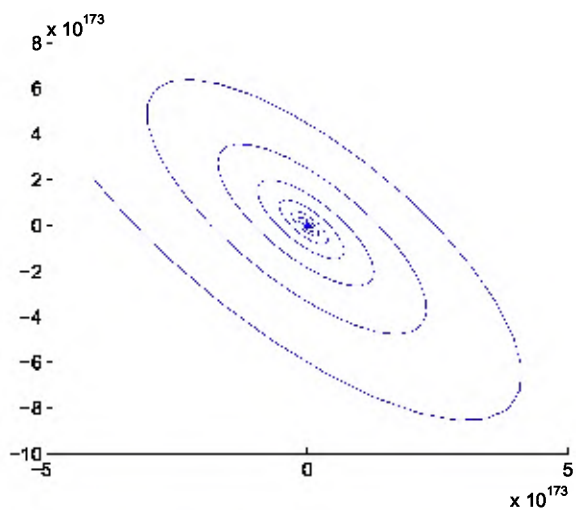
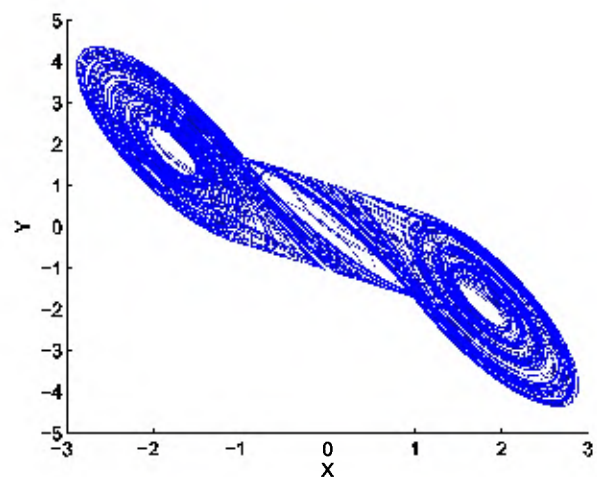
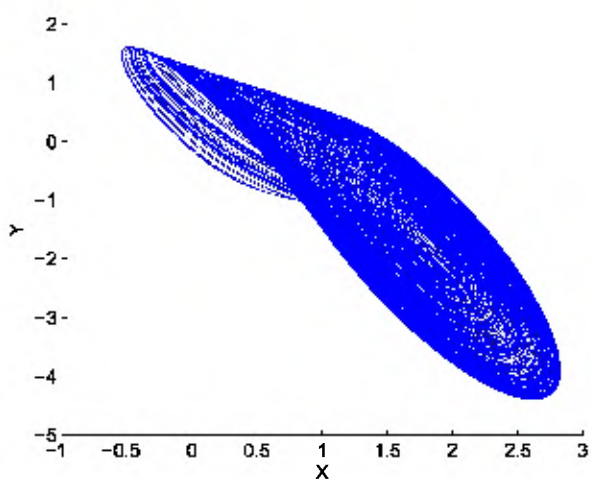
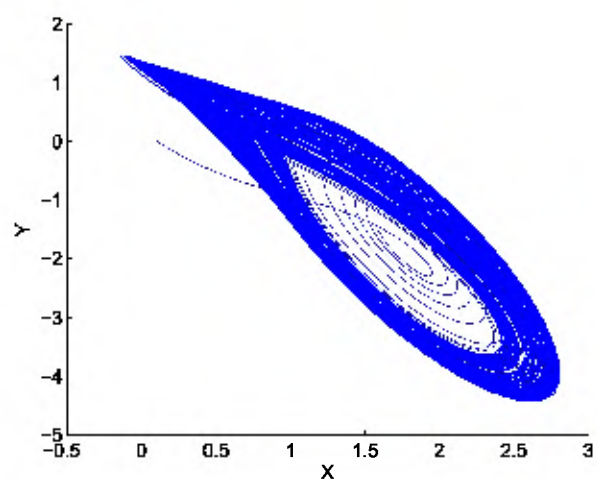
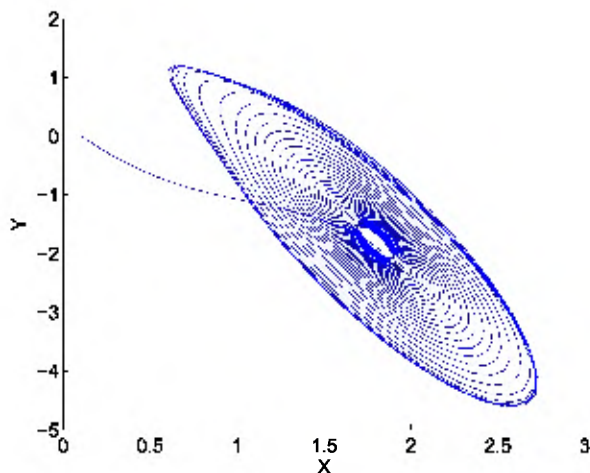
(a) Divergencia hasta $\beta = 13.6$ (b) Atractor tipo "double scroll" en $\beta = 16.7$ (c) Atractor tipo "screw" en $\beta = 18.8$ (d) Atractor tipo "espiral" en $\beta = 19.5$ (e) Ciclo límite con tendencia a punto fijo en $\beta = 24.1$

Figura 5. Para $\alpha = 10$, se tiene la bifurcación según el parámetro β . Dentro la región caótica $\beta \in [13.7, 24]$ se encuentran variedades de atractores extraños.

TABLA 2

Límites caóticos para la caracterización del sistema de Chua con tres parámetros.

α	γ	β	α	γ	β
5	0.01	5.8-8.4	55	0.01	121.1-289.2
	0.3	4.4-6		1.9	28.7-30.6
10	0.01	13.7-25.8	60	0.01	135.1-348.9
	0.86	6.2-6.6		1.9	34.4-39.3
15	0.01	22.8-38	65	0.01	149.8-452.9
	1	10.1-12.1		1.9	39.4-49.5
20	0.01	33-60.9	70	0.01	164.5-519.7
	1.3	11.1-12.3		2.0	38.3-40.9
25	0.01	43.9-93.4	75	0.01	180-587.7
	1.4	14.6-17.5		2.0	43.6-50.2
30	0.01	55.5-140	80	0.01	195.2-649.9
	1.5	17.6-20.5		2.0	48.5-60.5
35	0.01	67.6-131	85	0.01	210.8-718.4
	1.6	20.2-23.7		2.0	53.9-70.9
40	0.01	80.4-164.3	90	0.01	227.4-790.4
	1.7	22.3-25.2		2.0	58.9-82.9
45	0.01	93.6-203	95	0.01	242-878.7
	1.7	27.5-34.1		2.1	55.6-63.7
50	0.01	107-241.8	100	0.01	259.4-1007.8
	1.8	28.8-33.7		2.1	60.9-73.7

se cambió el valor de α y se encontró su correspondiente intervalo de β . Para todas las ejecuciones se utilizó el mismo tiempo de integración y las mismas condiciones iniciales.

Con los datos de la tabla 1 se obtuvieron las regiones de caos y periodicidades representadas en la Fig. 4.

Se observó que a partir de $\alpha = 2.5$, se encuentran atractores caóticos en un amplio rango de β . Cuando este parámetro aumenta de valor, el sistema en general presenta atractores en el orden siguiente: divergencia en el modelo, lo que implica un estado inestable. Luego, el sistema presenta atractores caóticos, y finalmente atractores periódicos (con tendencia a un punto fijo).

Ha sido interesante notar que también existe un rango de condiciones iniciales para el cual se tiene un atractor. Este rango va creciendo a medida que α aumenta. La condición inicial para x_0 es la que tenía el rango más amplio, luego y_0 y finalmente z_0 tiene un rango más restringido. Por ejemplo, para $\alpha = 10$ y $\beta = 13.7$, se obtiene un atractor extraño y su rango de condiciones iniciales va desde $[0.1, 0.15, 0.01]$ hasta $[1.3, 0.19, 0.01]$. Quizás esto no es tan sorprendente debido a que es la característica principal de un sistema caótico.

Posteriormente, se observó que la región de caos va creciendo con α y β . En la tabla 1 se presentan datos hasta $\alpha = 102$, esto no significa que ahí termina la región, de hecho el rango continúa creciendo. Sin embargo

determinar los límites hasta este valor fue suficiente para los propósitos de este trabajo.

Es importante mencionar que cada valor límite de β para todo α , ha sido verificado con el *exponente de Lyapunov*. Como se verá más adelante, el exponente de Lyapunov es una herramienta cuantitativa que ayuda a verificar la presencia de caos en un sistema.

Dentro de la región caótica, existe una variedad de formas de atractores extraños que, en estudios previos, cada uno de ellos ha sido bautizado con algún nombre, como por ejemplo: "double scroll" (Fig. 5(b)), "screw type" (Fig. 5(c)), "spiral" (Fig. 5(d)). Como ya se había mencionado, cuando β aumenta, antes de ingresar a la región caótica, se tiene una divergencia y luego una tendencia a un ciclo límite y finalmente a un punto fijo (ver Figs. 5(a) y (e)). Estas regiones no están determinadas en detalle, esto significa que dentro de la región caótica es posible encontrar ventanas periódicas y dentro de la región periódica es posible encontrar atractores casi-periódicos.

3.3. Metodología y Resultados para la Caracterización del Circuito Tipo Chua Considerando Tres Parámetros

Hasta cierto punto los pasos fueron los mismos que en la anterior caracterización.

Se empezó resolviendo numéricamente el sistema de Chua mediante el mismo programa en Matlab, excepto que esta vez se consideró un tercer parámetro γ .

Al principio, el estudio realizado fue cualitativo. Primero, se eligió un α para que quede fijo, luego se buscó el rango de β para un γ mínimo y lo mismo se buscó para un γ máximo. Luego, se escogió otro valor de α y se encontraron sus correspondientes intervalos de β y γ . En todos los casos se utilizó el mismo tiempo de integración t , las mismas condiciones iniciales (x_0, y_0, z_0) al igual que las pendientes a y b .

La caracterización de la región caótica, se presenta en la tabla 2, en el cual se observan los valores límites de β para el máximo y mínimo valor de γ correspondiente a cada valor de α . La región caótica delimitada por los tres parámetros se muestra en la Fig. 6, en ella, se tiene el plano α - β para el γ mínimo, en el cual se observa que la región caótica crece proporcionalmente, tal como lo que se obtuvo en la Fig. 4. Para el γ máximo, la región caótica también aumenta, pero es mucho más angosta. En el plano α - γ se observa también un aumento proporcional de la región caótica. Cuando el parámetro γ toma valores como por ejemplo: 0.01, para $\alpha = 100$, el intervalo de β es más amplio: $[259.4, 1007.8]$ que para un valor mayor, por ejemplo: $\gamma = 2.1$, en el que el intervalo de β es más angosto: $[60.9, 73.7]$. Esto se observa en el plano γ - β .

4. ESTUDIO CUANTITATIVO DEL CIRCUITO

4.1. El Exponente de Lyapunov

El exponente de Lyapunov es una herramienta muy útil para determinar si un sistema dinámico es o no caótico.

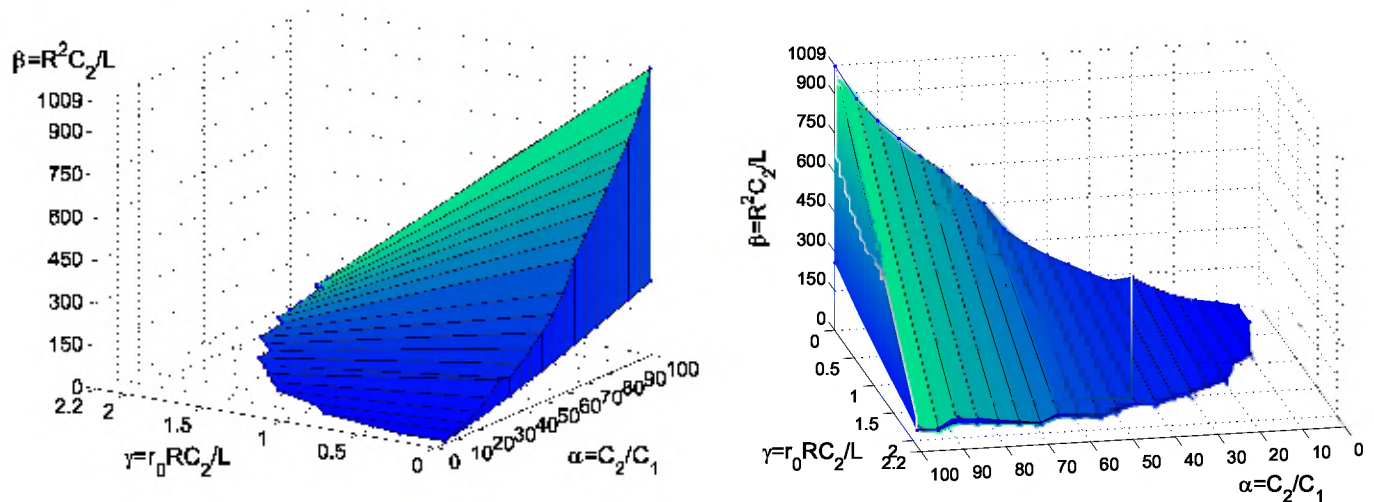


Figura 6. Caracterización del circuito tipo Chua con tres parámetros. Se muestran dos vistas de la región caótica. Esta región podría contener huecos debido a las ventanas periódicas.

Si al sistema de Chua se le asigna una condición inicial $[x(0), y(0), z(0)]$, la integración numérica proporciona una serie temporal para cada una de las coordenadas. Si la misma condición inicial es modificada ligeramente, entonces se tiene una serie temporal que al principio recorre la misma trayectoria anterior pero después de un tiempo ésta se va separando exponencialmente. Este fenómeno es una característica de un sistema caótico ya que el comportamiento de las trayectorias depende de las condiciones iniciales y precisamente explica porqué estos sistemas son difíciles de predecir a largo plazo (ver Fig. 7).

El exponente de Lyapunov se representa por λ y es una cuantificación del crecimiento exponencial de la distancia entre dos puntos de dos series temporales con condiciones iniciales ligeramente distintas de un sistema dinámico determinista. El número de exponentes de Lyapunov depende del número de variables de estado que tiene el sistema. Pero basta con determinar uno de ellos.

Observando la figura 7, se considera un punto cualquiera x_t en el momento t , el cual es perturbado una distancia ε_t y se obtiene otro punto $x_t + \varepsilon_t$. En los sistemas caóticos la perturbación crece exponencialmente $|\varepsilon_t| \approx |\varepsilon_0|e^{\lambda t}$, lo que es equivalente a $\ln \frac{|\varepsilon_t|}{|\varepsilon_0|} \approx \lambda t$ y la perturbación en el instante $t = 0$ es siempre muy pequeña. Finalmente, el exponente de Lyapunov está definido por:

$$\lambda \approx \frac{1}{t} \ln \frac{|\varepsilon_t|}{|\varepsilon_0|}. \quad (4)$$

Como las trayectorias van separándose con el tiempo, el exponente de Lyapunov debe cumplir con la condición de ser positivo $\lambda > 0$. Además, si se grafica:

$$t \approx \frac{1}{\lambda} \ln \frac{|\varepsilon_t|}{|\varepsilon_0|} \quad (5)$$

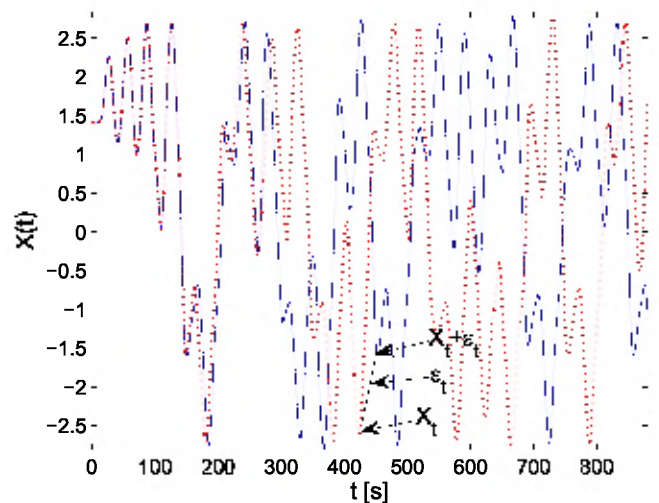
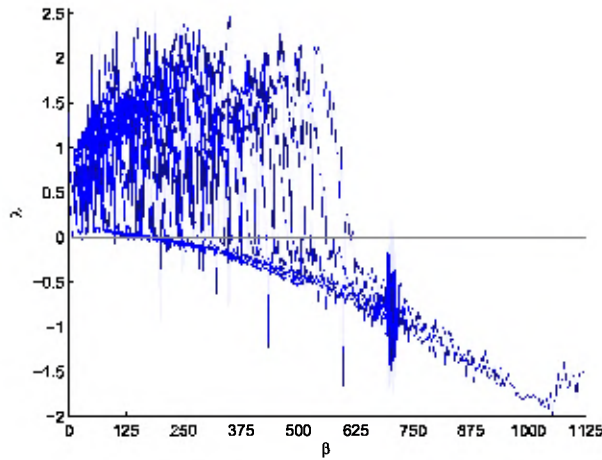
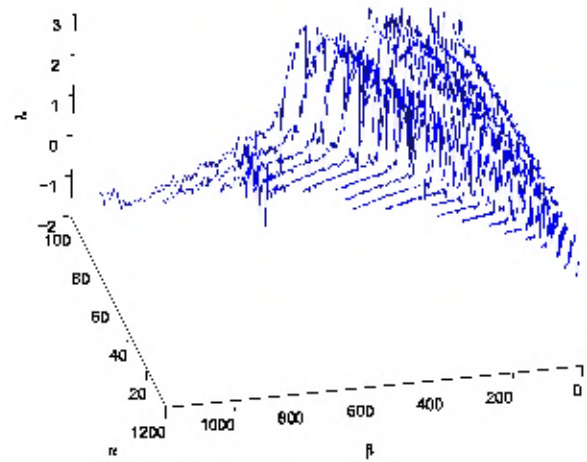
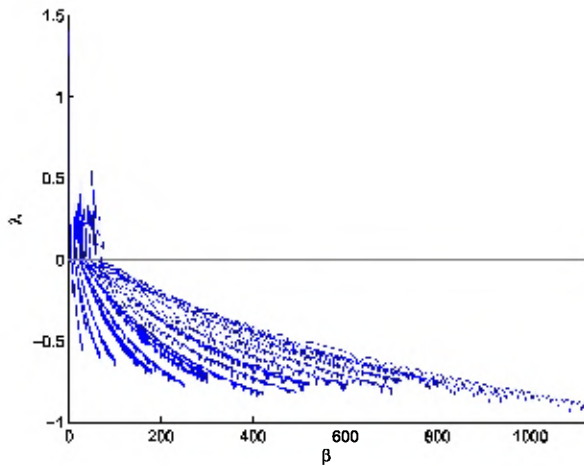
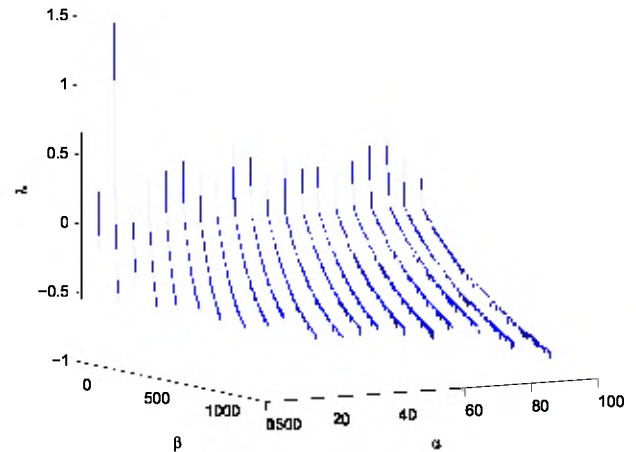


Figura 7. Sensibilidad a las condiciones iniciales en el sistema de Chua con $\alpha = 100$, $\beta = 418$. La serie temporal sólida tiene una condición inicial $(1.4, 0.19, 0.01)$ y la punteada $(1.41, 0.19, 0.01)$.

considerando el tiempo t y el $\ln \frac{|\varepsilon_t|}{|\varepsilon_0|}$ se tiene una curva cuya pendiente es positiva.

En general, el exponente de Lyapunov puede calcularse numéricamente con la rutina computacional *Lyapun-k* que corresponde al software TISEAN [12]. El resultado de esta rutina es un conjunto de datos que vienen a ser los logaritmos naturales, por lo tanto, estos deben ser graficados y ajustados a una recta para obtener la pendiente λ .

Como el sistema tiene tres variables, existen también tres exponentes, pero sólo basta con que un de ellos sea positivo para considerar una región como caótica. Sin embargo, para tener una información más completa sobre las periodicidades, es importante tener en cuenta el resto de los exponentes.

(a) Exponente de Lyapunov vs. β .(b) Exponente de Lyapunov vs. α y β .Figura 8. Espectros de Lyapunov para γ mínimo, la región caótica es amplia. Caos se encuentra cuando $\lambda > 0$.(a) Exponente de Lyapunov vs. β .(b) Exponente de Lyapunov vs. α y β .Figura 9. Espectros de Lyapunov para γ máximo, la región caótica es angosta.

4.2. Metodología y Resultados Para Obtener el Exponente y el Espectro de Lyapunov

Para comprobar las regiones caóticas del sistema de Chua considerando dos parámetros, se guardaron los datos proporcionados por la integración numérica para un α y un β (ya sea el mínimo o el máximo) en un archivo *.dat y se consideró solamente el 80% de estos datos con el fin de descartar los transientes.

A continuación, se introdujo el archivo *.dat en la rutina (*Lyap-k*) del software TISEAN y se hizo correr según las instrucciones que se indican en la bibliografía [12].

Se graficó el nuevo archivo de datos que proporciona *Lyap-k*, se obtuvo la pendiente de la curva y se verificó que los exponentes eran positivos.

Considerando el tercer parámetro, se prosiguió de la misma manera que en la anterior caracterización y se comprobó que el exponente era positivo en cada límite.

Además, se obtuvo el espectro de Lyapunov, esta vez se utilizó una rutina que proporcionaba todos los exponentes de Lyapunov para varios valores de β . Es decir, para un α y un γ (ya sea mínimo o máximo), se hizo correr el valor de β en pasos pequeños, luego se tomó cada serie temporal de la variable X y para cada una de ellas se calculó el exponente de Lyapunov utilizando la ecuación (4).

Este procedimiento se ha realizado para todos los valores de α que varía en pasos de 5 a partir de 5 hasta 100.

Estos espectros dan una idea más general de la región caótica y sirven para corroborar los resultados de la caracterización con dos parámetros.

Se encontró el espectro de Lyapunov respecto de α y β para el γ mínimo y para el γ máximo. Se observa que para el γ mínimo, el espectro informa que existen regiones caóticas para todo valor de α y una amplia región de

TABLA 3

Para las figuras (a)-(j) se tienen los datos de los componentes con los cuales se obtuvieron los atractores en laboratorio y los correspondientes valores de parámetros para el modelo. Para las figuras (1)-(10) se tienen los valores de los parámetros más adecuados para obtener los mismos atractores con el modelo.

Fig.	Atractor	C_2 [nF]	R [Ω]	α	β	γ	Fig.	α	β	γ
a	Ciclo límite primer orden	1.5	1200	150	2.16	0.0434	1	150	2.16	0.053
b	Caótico no fractal	1.5	1325	150	2.63	0.0479	2	2.7	2.7	0.038
c	Doble hélice	1.5	1377	150	2.84	0.0498	3	2.7	2.8	0.01
d	Ventana periódica 2-2	1.5	1388	150	2.88	0.0502	4	2.7	2.9	0.01
e	Transición de la ventana al caos	1.5	1392	150	2.90	0.0503	5	2.7	2.9	0.02
f	Ventana periódica 3-3	1.5	1424	150	3.04	0.0515	6	2.7	3.0	0.01
g	Espiral	1.5	1487	150	3.31	0.0538	7	2.7	3.1	0.05
h	Doble hélice	2.7	1562	270	6.58	0.1016	8	10	17	0.08
i	Doble gancho	6.8	1568	680	16.71	0.2570	9	10	14	0.01
j	Doble hélice	47	1364	4700	87.44	1.5450	10	50	54	1.63

β , con varias ventanas periódicas. Para este γ , se tiene el espectro de Lyapunov con respecto a β (ver Fig. 8(a)), en él se observa una región caótica para $\beta \in [0, 725]$, con ventanas periódicas en varios puntos, y el paso a la periodicidad a partir de $\beta = 726$. Luego, el espectro de Lyapunov con respecto a los dos parámetros α y β se presenta en la figura 8(b), en la cual se tiene una región caótica ya a partir de $\alpha = 0$, y lo mismo para $\beta = 0$, posteriormente, cuando $\alpha = 30$, comienzan a aparecer las ventanas periódicas y a partir de $\beta = 200$, sucede lo mismo. La región caótica va creciendo a medida que α y β aumentan. Este resultado va en aceptable concordancia con las regiones de la figura 6 y de igual modo con la figura 4.

En cambio, para el γ máximo, el espectro indica que las regiones caóticas se tienen para todo valor de α pero con regiones muy angostas de β (ver Fig. 9(a)). Esto implica que cuando γ va llegando a su máximo valor y β toma valores grandes, entonces la tendencia del sistema es hacia la periodicidad. Una vista global se observa en la Fig. 9(b).

Estos espectros ayudan a completar la información obtenida para el sistema con dos parámetros, además el espectro del exponente de Lyapunov nos da una información global del comportamiento del sistema cuando sus parámetros varían.

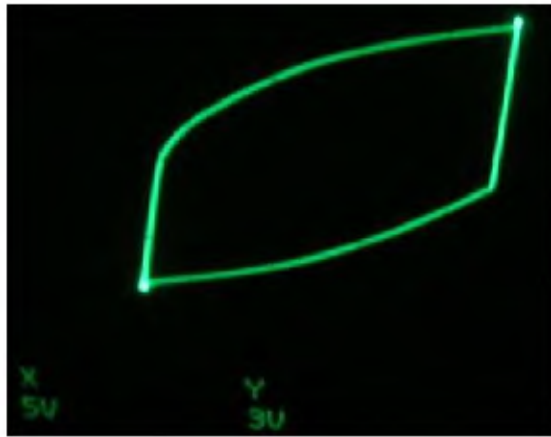
Experimentalmente, se observó que cuando $\alpha = 150$ se formaban variedades de atractores con una región caótica amplia y con ventanas periódicas, en cambio para $\alpha = 4700$ se obtuvo menor variedad de atractores y no fue posible observar ventanas periódicas. Al aumentar el valor del potenciómetro, γ y β también aumentan, por lo tanto, sí fue posible observar que el sistema tendía a ciclos límite y puntos fijos cuando la resistencia llegaba a los 2 k Ω , tal cual describe el espectro de Lyapunov para el γ máximo.

5. ALGUNAS OBSERVACIONES EXPERIMENTALES

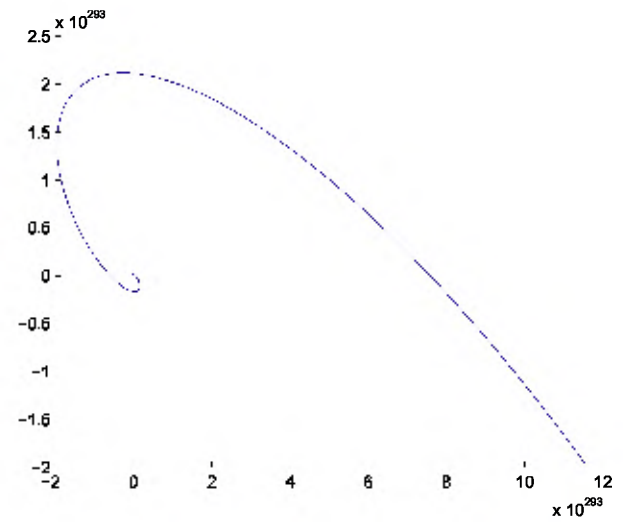
Experimentalmente, los siguientes componentes: $C_1 = 10$ pF y $L=1$ mH ($r_0 = 24.1 \Omega$) fueron las piezas clave para encontrar caos. C_2 pudo adquirir valores desde los 1.5 nF hasta los 47 nF y R desde 0 Ω hasta los 2 k Ω . A continuación se presentan algunos resultados experimentales y sus parámetros adimensionales equivalentes en la tabla 3. En el mismo, se muestran los valores de los parámetros α , β , γ más adecuados y que introducidos en el modelo se obtuvieron los mismos atractores del laboratorio. Se observa que no existe una coincidencia entre los parámetros del modelo con los del laboratorio, por ejemplo: según el modelo, para $\alpha = 150$, la región caótica comenzaba recién en $\beta = 435$ y $\gamma = 0.01$. Para $\alpha = 270$, se tenía caos a partir de $\beta = 898$ y $\gamma = 0.01$, para $\alpha = 680$, el caos empezaba a partir de $\beta = 2781$ y $\gamma = 0.01$. Mayor concordancia se obtuvo en los valores experimentales y numéricos de γ , un tanto de β y mayores problemas se obtuvieron en los valores de α . A pesar de no haber obtenido la correspondencia esperada entre resultados experimentales con la tabla de caracterización numérica, se obtuvieron los atractores característicos del sistema, entre los cuales están el atractor de doble hélice, el atractor espiral, el atractor de doble gancho, ventanas periódicas 2-2, 3-3 y ciclos límite de primer y segundo orden (ver Figs. 10—13). Es importante mencionar que en el modelo, se mantuvieron constantes a y b , las cuales dependen de la resistencia. Por lo tanto, según el modelo lo que variaba al cambiar β y γ era en realidad la inductancia. Sin embargo, en el experimento, el componente variable fue la resistencia puesto que una inductancia variable es más difícil de conseguir. Al parecer, este detalle influye en la concordancia entre resultados experimentales y numéricos.

6. ESTUDIO DEL CIRCUITO RL-DIODO

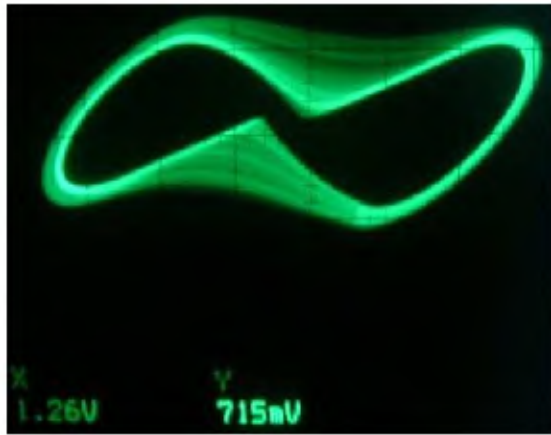
En general, se dice que para observar comportamientos caóticos, es necesario que el sistema sea de tercer



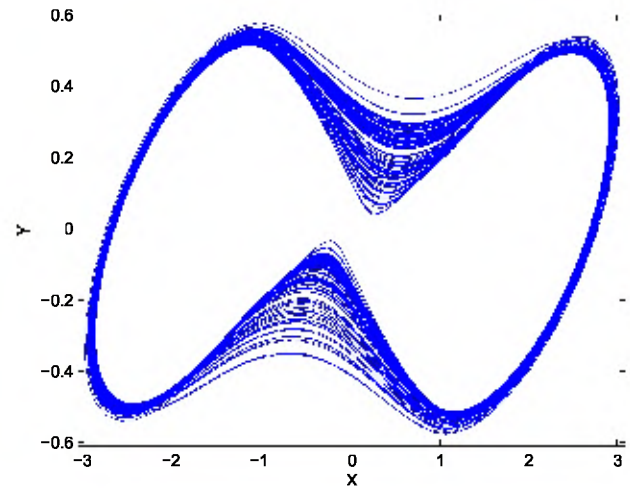
(a)



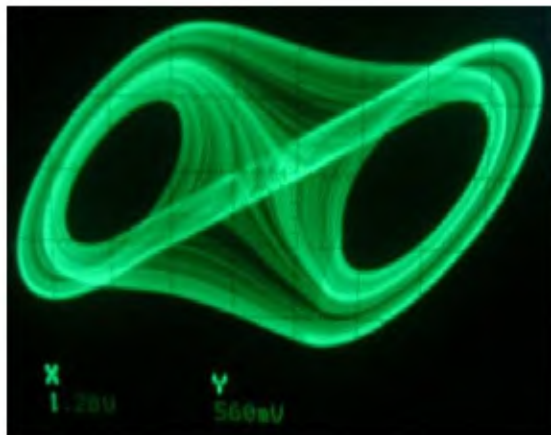
(1)



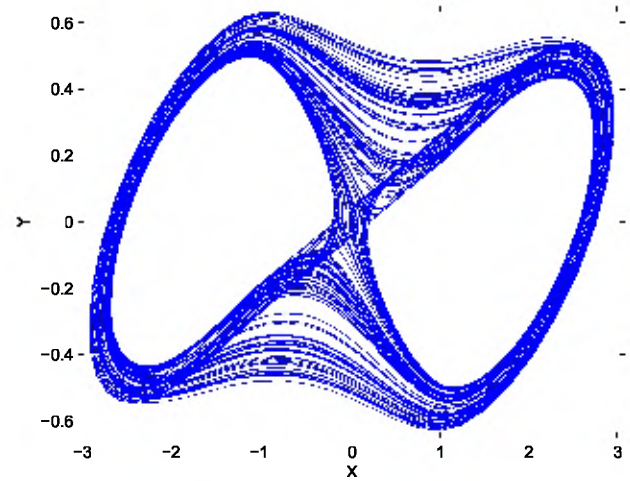
(b)



(2)

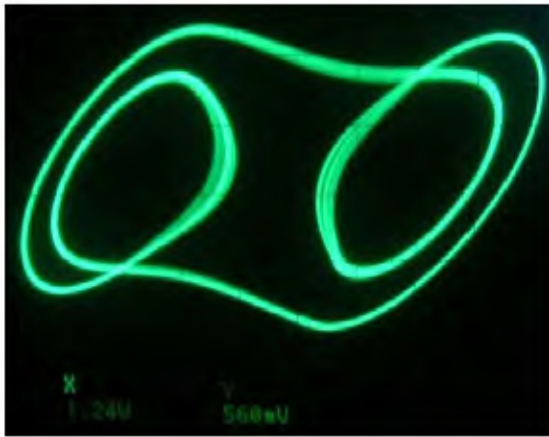


(c)

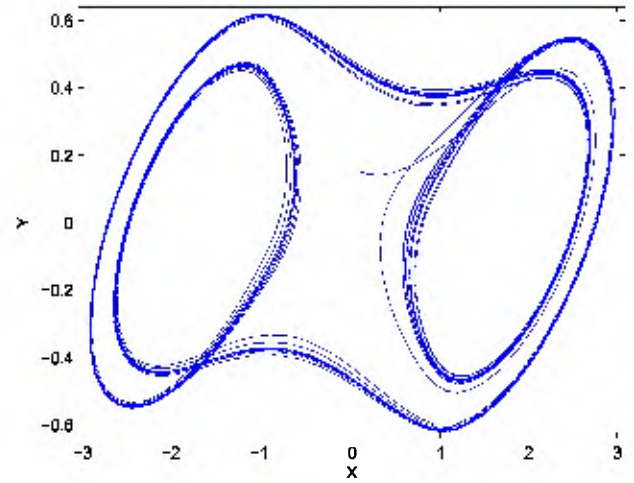


(3)

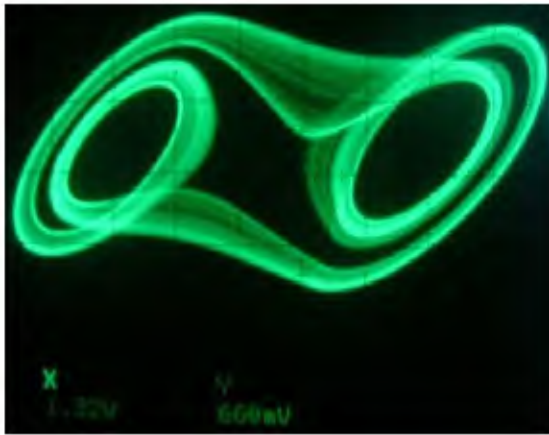
Figura 10. Las imágenes (a)-(c) corresponden a los atractores obtenidos en laboratorio y las imágenes (1)-(3) corresponden a los obtenidos con el modelo. X y Y se miden en voltios en laboratorio.



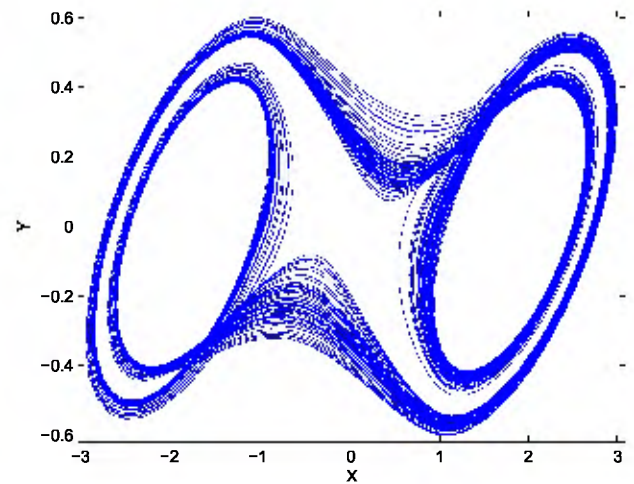
(d)



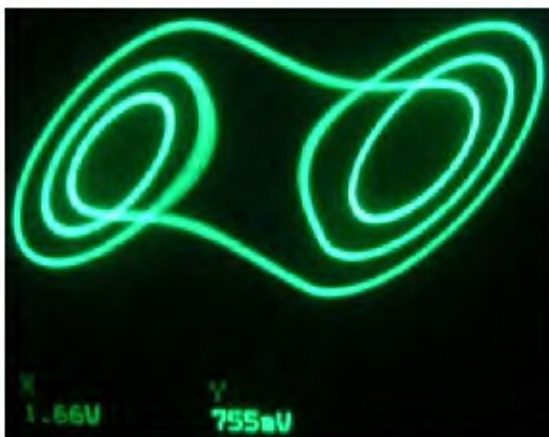
(4)



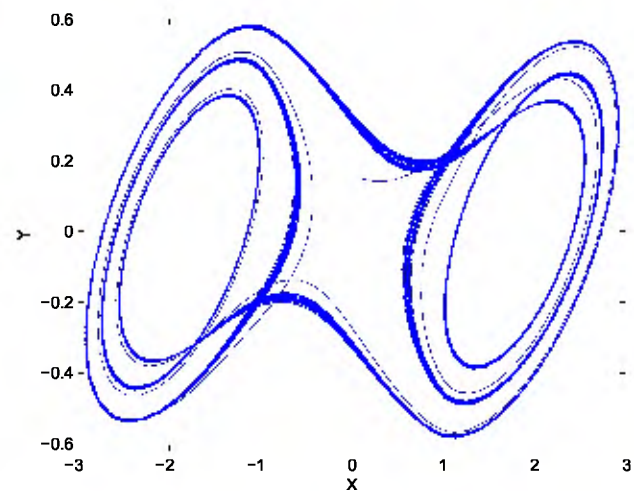
(e)



(5)

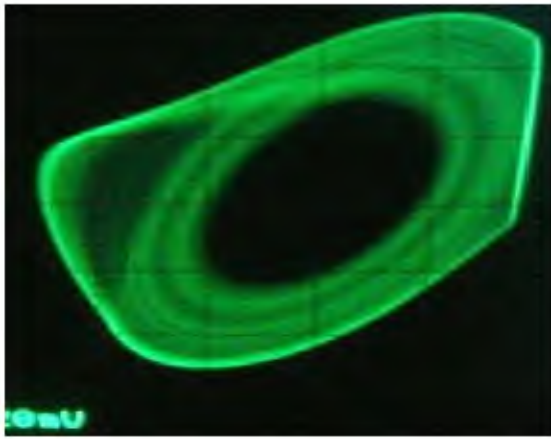


(f)

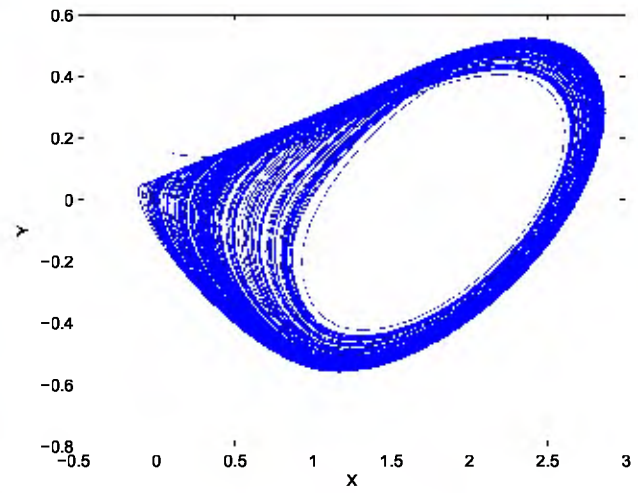


(6)

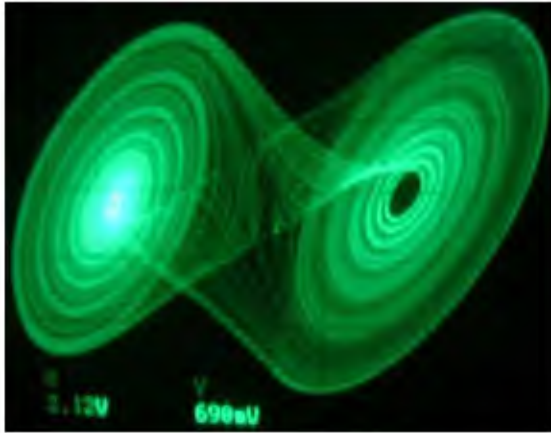
Figura 11. Las imágenes (d)-(f) corresponden a los atractores obtenidos en laboratorio y las imágenes (4)-(6) corresponden a los obtenidos con el modelo. X y Y se miden en voltios en laboratorio.



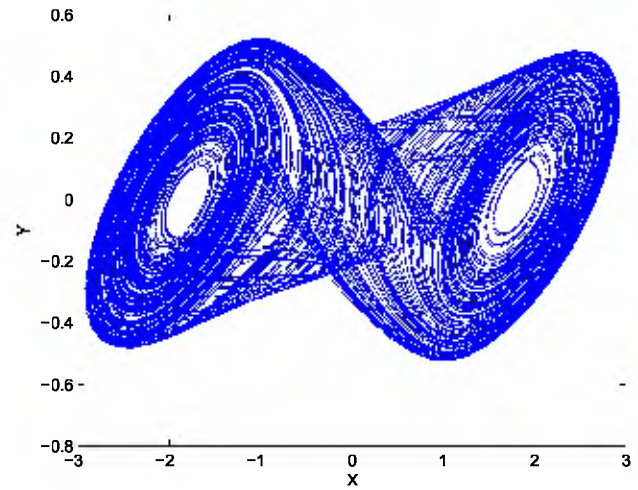
(g)



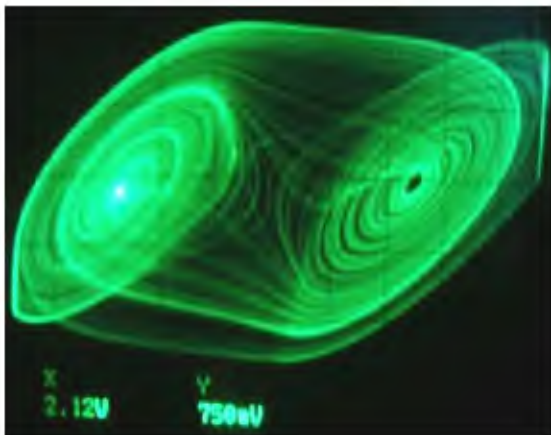
(7)



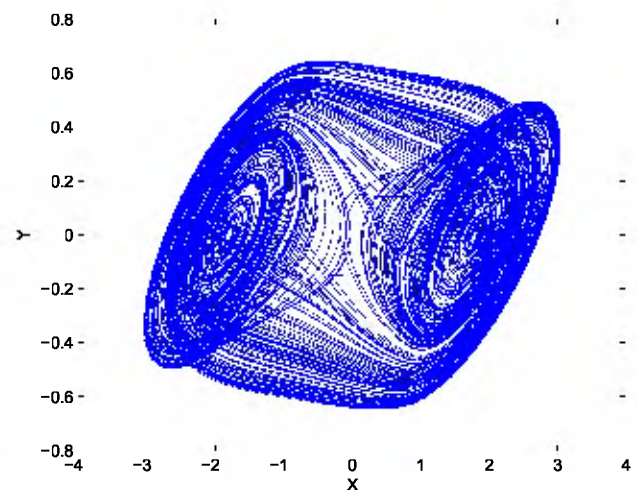
(h)



(8)

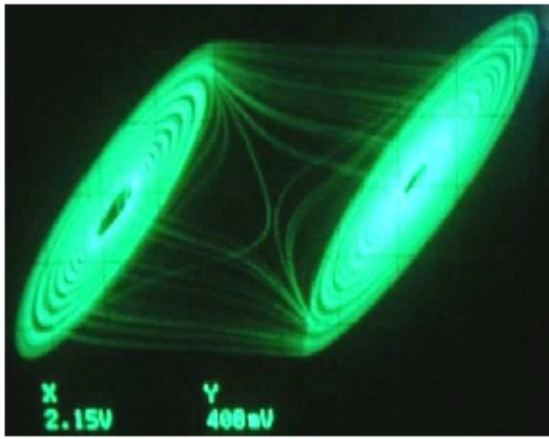


(i)

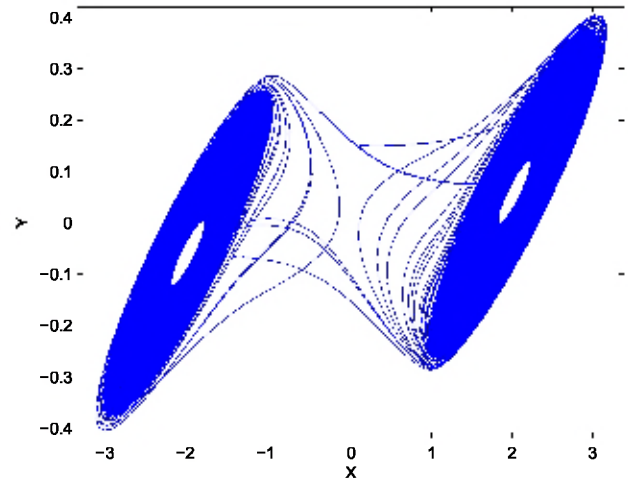


(9)

Figura 12. Las imágenes (g)-(i) corresponden a los atractores obtenidos en laboratorio y las imágenes (7)-(9) corresponden a los obtenidos con el modelo. X y Y se miden en voltios en laboratorio.



(j)



(10)

Figura 13. La imagen (j) corresponde al atractor obtenido en laboratorio y la imagen (10) corresponde al obtenido con el modelo. X y Y se miden en voltios en laboratorio.

orden o mayor. En el caso de los circuitos autónomos, se necesita que el sistema se componga de un elemento no lineal y por lo menos tres elementos lineales que almacenen energía (inductor, resistencia, capacitor), como se ha visto con el circuito de Chua, es autónomo porque no necesita de fuentes de energía alterna ya que es el mismo circuito el que transforma la señal continua proveniente del diodo en alterna, además el diodo de Chua es la pieza clave para el comportamiento no lineal de todo el circuito. No obstante, ésta regla no es definitiva puesto que puede existir caos en un sistema más sencillo compuesto por una resistencia lineal, un inductor lineal, un diodo normal y una fuente de voltaje. El circuito RL-Diodo, al contrario tiene una fuente de energía alterna, por lo que se lo denomina *no autónomo*, y tres elementos que bajo ciertos parámetros de frecuencia y amplitud, se generan señales aperiódicas mediante el desdoblamiento de periodo de la tensión en el diodo.

Entonces, a un circuito RLC se reemplaza el condensador por un diodo normal (ver Fig. 14), el cual al ser un elemento no lineal, es el causante de las aperiodicidades. En este circuito se asume que el voltaje de la fuente tiene la forma $V_a = V_0 \cos \omega t$ y cuando el voltaje es positivo, el diodo conduce y se produce una caída de voltaje $V_b = -V_f$. En el estado no conductor, el diodo se comporta como un capacitor, el cual presenta una corriente de carga y el voltaje sigue la frecuencia de la fuente.

La amplitud del voltaje de fuente $\lambda = V_0$ es el parámetro de control. Esta amplitud no necesariamente es igual para cada ciclo porque cuando la corriente llega a cero, el diodo continúa conduciendo con un tiempo $\tau_r = \tau_m(1 - e^{-|I_m|/I_c})$, donde $|I_m|$ es la corriente máxima durante ese ciclo, τ_m el tiempo máximo constante, τ_r el tiempo de recuperación e I_c es constante. Por lo tanto, dependiendo del parámetro V_0 , el voltaje en el diodo V_b se repite con un periodo y se va desdoblamiento hasta llegar

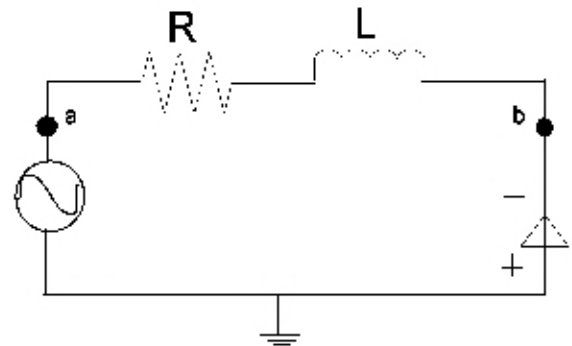


Figura 14. El circuito RL-Diodo.

al caos. Como el voltaje en el diodo depende del voltaje de la fuente y éste depende también de la frecuencia $f = \omega/2\pi$, se espera un comportamiento similar con su variación [13].

Uno de los caminos más comunes para llegar a un comportamiento caótico es el *desdoblamiento de periodo* en el que las bifurcaciones mediante éste fenómeno ocurren solamente con soluciones periódicas o trayectorias que bajo un punto de bifurcación tienen periodo T y bajo otro punto de bifurcación sufren un cambio ligero presentando un periodo $2T$. En el espacio de fases se observaría un ciclo límite (un lazo) que bajo cierto parámetro se convertiría en un ciclo límite de segundo orden (dos lazos) y así sucesivamente los lazos continuarían desdoblándose al igual que las soluciones con un periodo $T_k = 2^k T_0$ donde $k = 0, \dots, n$. Si se observa este proceso es muy probable que el sistema llegue a ser caótico [14].

Una característica del desdoblamiento de periodo es que los puntos de bifurcación (parámetros de control) λ_k convergen geoméricamente al llegar a la región caótica. Este valor llegó a ser universal por presentarse en varios

sistemas caóticos y se denomina la primera constante de Feigenbaum:

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Delta_k}{\Delta_{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} = 4.669201... \quad (6)$$

Existe también otro comportamiento universal en las soluciones $X(t)$ de un sistema, o Vb en este caso, definido por:

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_k}{d_{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{Vb_k^{(1)} - Vb_k^{(2)}}{Vb_{k+1}^{(1)} - Vb_{k+1}^{(2)}} = 2.502907... \quad (7)$$

Siendo $Vb_k^{(1)}$ y $Vb_k^{(2)}$ dos soluciones de una ramificación en un punto de bifurcación λ_k .

6.1. Metodología y Resultados Para Estudiar el Circuito R-L-Diodo

Primero, se armó el sistema según el diagrama de la Fig. 14 mostrada en la sección anterior. En un canal del osciloscopio se mostró el voltaje de entrada V_0 y en el otro canal se mostró el voltaje en el diodo V_b .

Luego, se encontró la frecuencia en la cual al variar la amplitud, el sistema presentaba bifurcaciones y caos. A esta frecuencia, se hizo variar la amplitud del voltaje de fuente y se observó el cambio de periodo en la señal del diodo hasta encontrar el valor de voltaje de fuente en el que ocurren los comportamientos caóticos. Se anotaron los valores V_0 y se procedió a calcular la primera constante de Feigenbaum δ . Además se hizo el intento de medir los valores de voltaje en el diodo correspondientes a cada punto de bifurcación y calcular la segunda constante α . Posteriormente, estos puntos fueron graficados.

Por otra parte, se observó el comportamiento del sistema cuando el voltaje queda fijo y la frecuencia varía.

El comportamiento del diodo se ve afectado sobre todo a frecuencias altas (1 MHz-3 MHz) y/o a amplitudes altas. Se encontró que a partir de $f=195.3$ kHz se observan bifurcaciones que llegan a regiones caóticas cuando el valor del voltaje de fuente V_0 cambia. Esta frecuencia no es la misma para todos los diodos, a pesar de que todos sean de la misma serie 1N4007.

Este sistema permite apreciar con claridad el proceso de bifurcación, en el que la ruta hacia el caos es el desdoblamiento de periodo de la tensión en el diodo. Al principio, se presentan ciclos límite de primer orden, luego el orden aumenta y se ingresa a una región caótica bastante angosta, a continuación el sistema pasa a una ventana periódica. Posteriormente, ingresa otra vez a otra región caótica, luego se presenta otra ventana periódica más angosta que la primera y finalmente el sistema permanece en una región caótica. Fotografías de los estados de este proceso se observan en Fig. 15.

A continuación, se calcula la constante de Feigenbaum para la primera región caótica. Los valores que dan el mejor valor de la constante son: 1315 mV, 1415 mV, 1540 mV, 1610 mV y 1630 mV.

$$\delta = \frac{1415 - 1315}{1540 - 1415} = 0.80,$$

$$\delta = \frac{1540 - 1415}{1610 - 1540} = 1.786,$$

$$\delta = \frac{1610 - 1540}{1630 - 1610} = 3.50.$$

Para la segunda región caótica, se consideran los siguientes valores: 10850 mV, 11750 mV, 12550 mV, 13300 mV, 14400 mV, 14750 mV, 14830 mV. La constante da:

$$\delta = \frac{11750 - 10850}{12550 - 11750} = 1.1250,$$

$$\delta = \frac{12550 - 11750}{13300 - 12550} = 1.0667,$$

$$\delta = \frac{13300 - 12550}{14400 - 13300} = 0.6818,$$

$$\delta = \frac{14400 - 13300}{14750 - 14400} = 3.1429,$$

$$\delta = \frac{14750 - 14400}{14830 - 14750} = 4.3750.$$

Para la segunda constante de Feigenbaum, se obtiene una aproximación con los valores:

$$\alpha = \frac{675 - 285}{965 - 805} = 2.43.$$

Las constantes obtenidas cerca de las regiones caóticas no concuerdan con los valores teóricos porque V_b debe ser medido con mayor precisión y además debe ser elegido adecuadamente.

Por otro lado, se estudió el comportamiento del sistema manteniendo fijo el valor de la amplitud y variando la frecuencia. Se encontró que el comportamiento caótico ocurre a partir de $V_0 = 3.700$ V. Se observan similares bifurcaciones en las siguientes frecuencias: 477.8 kHz, 482.2 kHz, 573.4 kHz, 585.9 kHz, 609.6 kHz, 619.8 kHz, 622.3 kHz) y en 677.7 kHz el sistema ingresa a la región caótica (ver Fig. 16), manteniéndose en ese estado hasta que en la frecuencia máxima de 1003.8 kHz el sistema pasa a una ventana periódica y permanece en esa situación. El atractor en esta región es un ciclo límite, el cual luego sufre un desdoblamiento. La frecuencia máxima a la cual se pudo llegar fue 2044.5 kHz, por lo que se ha visto, a frecuencias altas el diodo se comporta de forma totalmente distinta a la conocida.

Con estos resultados se obtuvo la constante de Feigenbaum:

$$\delta = \frac{609.6 - 585.9}{619.8 - 609.6} = 2.323, \quad \delta = \frac{619.8 - 609.6}{622.4 - 619.8} = 3.923.$$

Estos resultados llevan a pensar que el sistema se encuentra en una región caótica, de todos modos, es necesario mayor precisión en las medidas. Debe tenerse en cuenta que tanto la frecuencia como el voltaje eran variables durante el experimento, lo que también puede introducir error en los datos. Utilizando una interfase experimento-computadora y analizando el espectro de potencias de las señales se obtendrían resultados con menor error.