

Tiempos necesarios para el establecimiento de equilibrio térmico en el procesamiento de castaña

Una Aplicación de Análisis de Fourier y Problemas de Contorno

Rónanth Zavaleta Mercado, PhD, PE

Profesor Emérito – Universidad Católica Boliviana “San Pablo”

ronanth.zavaleta@gmail.com

Resumen: El tratamiento industrial de castaña requiere de una forma práctica y rápida de poder determinar el tiempo requerido para que el centro de la castaña alcance la temperatura de la superficie, es decir el tiempo requerido para el establecimiento del equilibrio térmico en el procesamiento. A este efecto se realiza la simulación del proceso de calentamiento adoptando una simetría esférica y radios equivalentes. Las soluciones de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP) que describen el proceso son evaluadas en el centro de la castaña e impuesta la condición correspondiente al equilibrio térmico. Las ecuaciones trascendentes resultantes son evaluadas mediante técnicas numéricas obteniéndose valores del grupo adimensional (Foeq) que cumplen las condiciones impuestas y permiten determinar el tiempo requerido para el establecimiento del equilibrio para diferentes tamaños de castaña.

Dos escenarios fueron estudiados, el primero, despreciando la resistencia externa a la transferencia de calor, mientras que el segundo la incluye. En el primer caso se hace necesario conocer la conductividad térmica efectiva de la castaña y la conductividad térmica efectiva y el coeficiente pelicular en fase gaseosa para el segundo. A pesar de conocerse la solución analítica del problema se requiere de aplicaciones de técnicas de análisis numérico reiteradas habida cuenta de la naturaleza de las soluciones y los requisitos impuestos.

El modelo derivado y resuelto analíticamente puede ser validado experimentalmente por experimentación sencilla en laboratorio.

Palabras clave: castaña, equilibrio térmico

1 Introducción

Se establece un modelo simple no segregado exento de transferencia de masa, de transporte conductivo/convectivo de calor que describe el calentamiento de la castaña sujeta a un ambiente de calefacción en fase gaseosa. Se acepta que una simetría esférica puede en principio adaptarse al tratamiento matemático de la castaña, considerando el radio equivalente como longitud característica. Los

problemas de contorno descritos por ecuaciones diferenciales parciales (EDP) lineales y condiciones inicial y límite homogéneas son resueltas en base a aplicaciones de análisis de Fourier, separación de variables o transformadas de Laplace. Las ecuaciones parciales, expresadas en términos de variables adimensionales, son resueltas y evaluadas en el centro de la esfera donde además se impone la condición de equilibrio térmico, es decir la uniformidad de distribución de temperaturas dentro el dominio del problema. Las ecuaciones implícitas y consistentes de series infinitas son resueltas mediante algoritmos numéricos para determinar el grupo adimensional de equilibrio de Fourier (Fo_{eq}), que es aquel para el cual se establece el equilibrio térmico (Principio Cero de la Termodinámica). A partir del de este valor se puede determinar los tiempos requeridos para alcanzar el equilibrio para diferentes tamaños de castañas, a condición de que se conozcan algunas propiedades físico-químicas del material, entre ellas la conductividad térmica efectiva, el calor específico y la densidad, y en algunos casos, además de las anteriores, el coeficiente de transmisión de calor por convección.

2 El Modelo

Para la conducción de calor en sólidos la ecuación de conservación de energía en régimen transitorio, al ser combinada con la Ley de Fourier, resulta en¹

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = (\nabla \cdot k \nabla T) \quad [1]$$

donde T es la temperatura, t el tiempo, k la conductividad térmica, ρ la densidad y c la capacidad calorífica específica. Si se supone que la conductividad térmica k corresponde a un valor medio de temperatura y por lo tanto es independiente de la misma, la Ecuación [1] deviene en

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \quad [2]$$

en la cual $\alpha = \frac{k}{\rho c}$ es el coeficiente de difusión térmico. La forma expandida de la Ecuación [2] es

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right] \quad [3]$$

Si se admite que los gradientes en θ y ϕ son nulos y se acepta por lo tanto un modelo conductivo enteramente radial, se obtiene la siguiente EDP lineal, donde $T=T(t, r)$, siendo r la coordenada espacial radial

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad [4]$$

La consideración de diferentes interacciones con el entorno da lugar a condiciones límite e inicial que definen diversos problemas de contorno, de los cuales dos son estudiados en el presente trabajo.

3 Resistencia Externa Nula a la Transferencia de Calor

Si se considera despreciable la resistencia a la transferencia de calor en la fase gaseosa, es decir aquella correspondiente a la fase gaseosa de calefacción en sí, entonces la temperatura de la capa exterior de la castaña tiende a la temperatura del medio calefactor, y puede entonces considerarse constante. Si se acepta además que la temperatura externa de la castaña se mantiene constante en un valor T_0 , el problema de contorno queda definido por la Ecuación [4] y las siguientes condiciones límite e inicial

$$\frac{\partial T}{\partial r}(t,0) = 0 \quad \text{o} \quad T(t,0) \text{ finito} ; \quad T(t,a) = T_0 ; \quad T(0,a) = T_1 \quad [5]$$

donde a es el radio equivalente externo, T_0 la temperatura externa impuesta, T_1 la distribución inicial de temperaturas en la castaña, supuesta constante. Debe cumplirse por supuesto la condición $T_0 > T_1$.

La solución analítica del problema transitorio de contorno definido por las ecuaciones [4] y [5] se obtiene de una manera sencilla mediante separación de variables^{2,3,5,4}:

$$\Pi(Fo, \xi) = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1} = 1 + \frac{2}{\pi \xi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \text{sen}(n\pi\xi) e^{-n^2\pi^2 Fo} \quad [6]$$

donde $\xi = \frac{r}{a}$ y $Fo = \frac{\alpha t}{a^2}$ son respectivamente, la coordenada espacial adimensional normalizada ($0 \leq \xi \leq 1$) y el grupo adimensional de Fourier, mientras que $\Pi(Fo, \xi) = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1}$ es la temperatura adimensional normalizada, y que comprende,

por lo tanto, un dominio $0 \leq \Pi \leq 1$. La solución formal de problema (Ecuación [6]) es convergente y uniformemente convergente con respecto a Fo y ξ de acuerdo al criterio de Weierstrass, y satisface la EDP de partida y sus condiciones inicial y límite. Se puede demostrar, además, la convergencia uniforme de la solución mediante el Criterio de Cauchy y la unicidad de esta solución por aplicación del criterio de Abel.^{5,7}

La temperatura en el centro de la castaña se determina tomando el límite cuando $r \rightarrow 0$ y por consiguiente $\xi \rightarrow 0$ en la Ecuación [6], levantándose la indeterminación resultante por aplicación de la Regla de L'Hôpital

$$\Pi(FO, 0) = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 \pi^2 FO} \quad [7]$$

Cuando se alcanza el equilibrio térmico, definido por la Ley Cero de la termodinámica, debe cumplirse que $T \rightarrow T_0$ correspondiente a $\Pi \rightarrow 1$ y por lo tanto debe satisfacerse la siguiente ecuación

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 \pi^2 FO} = 0 \quad [8]$$

Esta ecuación implícita trascendente puede resolverse para obtener un FO_{eq} asociado con el tiempo para el establecimiento del equilibrio térmico en la castaña, y por lo tanto proporciona el tiempo requerido para que el centro alcance la misma temperatura que la superficie:

$$FO_{eq} = \frac{\alpha t}{a^2} \quad [9]$$

$$t_{eq} = \frac{FO_{eq} a^2}{\alpha}$$

Al sustituir $\alpha = \frac{k_e}{\rho c}$, donde k_e es la conductividad térmica efectiva, ρ la densidad y c la capacidad calorífica específica en la Ecuación [9], se tiene en definitiva que

$$t_{eq} = \frac{FO_{eq} a^2 \rho c}{k_e} \quad [10]$$

Alternativamente, si se determina experimentalmente el tiempo requerido para alcanzar el equilibrio, la conductividad efectiva puede determinarse a partir de la Ecuación [10].

4 Resistencia Externa Finita a la Transferencia de Calor

En este caso la resistencia a la transferencia de calor correspondiente al medio calefactor no puede ser despreciada y debe ser incorporada en el análisis. Como la interfase sólido-gas puede considerarse de capacidad calorífica nula y no puede en consecuencia almacenar energía, el principio de conservación de energía conduce a que la interacción de calor predominante en el medio gaseoso anexo a la interfase, que corresponde a un mecanismo combinado convectivo-difusivo, debe ser igual en magnitud a aquella interacción del medio sólido, donde predomina un mecanismo conductivo descrito por la Ley de Fourier. Esta aproximación da lugar al siguiente conjunto de condiciones límite e inicial

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial r}(t,0) &= 0 \quad \text{o} \quad T(t,0) \text{ finito} \\ h(T_\infty - T(t,a)) &= -k_e \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{t,r=a} \\ T(0,a) &= T_1 \end{aligned} \tag{11}$$

donde h es el coeficiente pelicular de transferencia de calor. Al intentar la solución por separación de variables, estas condiciones conjuntamente a la Ecuación [4] conforman el nuevo problema transitorio de contorno, estrictamente uno de Sturm - Liouville de condiciones homogéneas de contorno tipo Neumann. La solución analítica es^{2,3,4}

$$\Pi(Fo, \xi) = \frac{T - T_1}{T_\infty - T_1} = 1 - 2 \frac{Bi}{\xi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_n^2 Fo}}{[\beta_n^2 + Bi(Bi - 1)]} \frac{\text{sen} \beta_n \xi}{\text{sen} \beta_n} \tag{12}$$

en la que $Bi = \frac{ha}{k_e}$ es el grupo adimensional de Biot, que es el cociente de los dos mecanismos combinados de transporte de calor, convectivo y conductivo, y cuya magnitud indica la predominancia relativa de uno de estos mecanismos, T_∞ es la temperatura del medio calefactor, T_1 la temperatura inicial supuesta constante, y β_n es el vector infinito de autovalores resultante de la solución de la ecuación cuyo parámetro es Bi

$$\beta_n \cot \beta_n + Bi - 1 = 0 \tag{13}$$

La solución formal de problema (ecuaciones [12] y [13]), al igual que en el caso anterior, es convergente y uniformemente convergente con respecto a Fo y ξ de acuerdo al criterio de Weierstrass, y satisface la EDP de partida, así como su condición inicial y límite. Se puede demostrar, además, la unicidad de esta solución.^{6,7}

La solución obtenida puede ser evaluada en el centro de la esfera, es decir cuándo $\xi \rightarrow 0$. La indeterminación se levanta mediante la Regla de L'Hôpital obteniéndose

$$\Pi(Fo, 0) = \frac{T(t,0) - T_1}{T_\infty - T_1} = 1 - 2Bi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_n^2 Fo}}{[\beta_n^2 + Bi(Bi - 1)]} \frac{\beta_n}{\text{sen} \beta_n} \tag{14}$$

que es la distribución de temperaturas en el centro de la esfera. Cuando se alcanza el equilibrio térmico $T(Fo,0) \rightarrow T_\infty$ y por consiguiente $\Pi(Fo,0) \rightarrow 1$, quedando la Ecuación [14] en

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_n^2 Fo_{eq}}}{[\beta_n^2 + Bi(Bi - 1)]} \frac{\beta_n}{\text{sen} \beta_n} = 0 \tag{15}$$

El sistema de ecuaciones [13] y [15] proporcionan un Fo_{eq} para cada valor de Bi (ya que $Fo_{eq} = f(Bi)$). Por lo tanto, como en el caso anterior, se puede determinar el tiempo para alcanzar el equilibrio, o alternativamente la conductividad efectiva a partir de

$$t_{eq} = \frac{f(Bi)a^2 \rho c}{k_e} \quad [16]$$

a condición de que se determine $Fo_{eq} = f(Bi)$.

5 Resultados y Discusión

5.1 Resistencia Externa Nula a la Transferencia de Calor

La Ecuación [6] establece la variación de los perfiles de temperatura con el tiempo al interior de la castaña, tal como se ve en la Figura 1: La temperatura tiende al equilibrio al aumentar el tiempo (incrementándose Fo paralelamente).

El tiempo requerido para alcanzar el equilibrio es tanto mayor cuanto más interno es el punto a considerarse. En procesos de calentamiento el centro de la esfera será el último en alcanzar el equilibrio.

Tal como se puede apreciar en la Figura 2:, existe un tiempo finito (Fo finito) para el cual se alcanza el equilibrio. Esta figura es una representación de la Ecuación [7] descriptiva de la dinámica de la temperatura en el centro de la esfera.

Se podría anticipar que debería existir un valor de $Fo < \infty$ para el cual se cumpla la condición de equilibrio, es decir un Fo_{eq} tal que $\Pi \rightarrow 1$ cuando $Fo \rightarrow Fo_{eq}$. Este criterio impuesto en la Ecuación [7] permite deducir la Ec. [8], que puede ser resuelta numéricamente para obtener Fo_{eq} . Este valor resulta ser igual a 0.802 (valor obtenido utilizando subprogramas de Mathcad 15® de la firma Mathsoft Engineering & Education, Inc).

Consecuentemente, la Ecuación [10] se reduce a

$$t_{eq} = 0.802 \frac{a^2 \rho c}{k_e} \quad [17]$$

Si se define como V el volumen de la castaña, entonces el radio equivalente a , que es aquel que corresponde a la esfera de igual volumen, está dado por,

$$a = \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \quad [18]$$

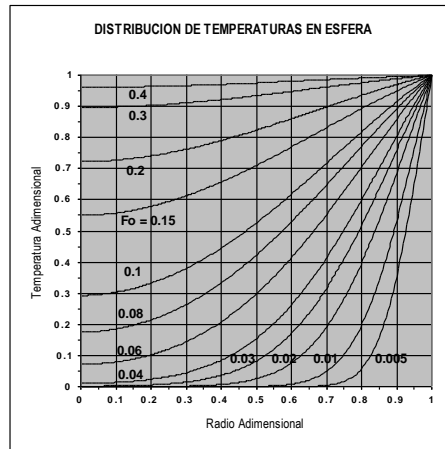


Figura 1: Distribución de temperatura adimensional $\Pi(Fo, \xi)$ como una función del radio adimensional ξ y como parámetro el módulo de Fourier, Fo .

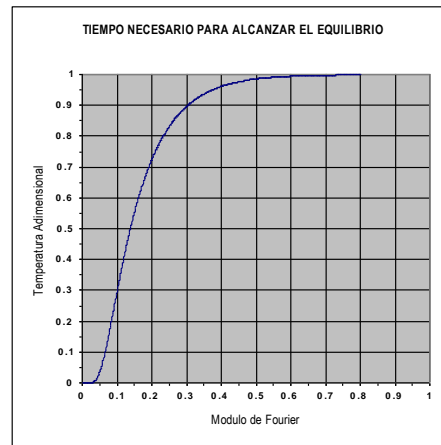


Figura 2: Temperatura adimensional $\Pi(0, Fo)$ evaluada en el centro de la esfera como una función del módulo de Fourier, Fo .

Por lo tanto, de conocerse V , ρ , c y k_c es posible determinar el tiempo requerido para que el centro de la castaña alcance la temperatura de la superficie, o alternativamente si se determina experimentalmente t_{eq} , puede obtenerse k_c .

5.2 Resistencia Externa Finita a la Transferencia de Calor

La solución analítica que comprende las ecuaciones [12] a [16] tiene como parámetro a Bi , y por lo tanto puede anticiparse una solución para cada valor del mismo. Si se decide un valor de Bi puede obtenerse el vector que contenga los

autovalores de la solución y por lo tanto evaluarse ésta. Comentarios similares se aplican a las soluciones para el centro de la castaña y para el tiempo requerido para el establecimiento del equilibrio.

El cálculo de la solución analítica puede volverse engorroso y requiere de aplicaciones reiteradas de algoritmos numéricos y la utilización de computadores digitales. La determinación de un número suficiente de autovalores como para permitir la convergencia de la solución resulta en la determinación de un conjunto importante de raíces (las 100 primeras para el presente trabajo), resultantes de intersecciones de funciones hiperbólicas y cotangentes, como puede apreciarse en la Figura 3: Cada valor de Bi da lugar a un vector diferente de autovalores, y por lo tanto a soluciones diferentes, para cualquier punto del dominio del problema, así como a un valor nuevo de Fo_{eq} .

En las tablas 1 y 2 se incluyen los primeros 25 autovalores de la Ecuación [13] calculados para varios valores de Bi , tanto mayores como menores a 1, mediante los subprogramas 1 a 4 escritos en MathCad 15 y que utilizan recurrentemente algoritmos numéricos correspondientes a los métodos de Ridder y alternativamente, el de Brent contenidos en la función *root*®.

En las figuras 4 y 5 se ha graficado las funciones de la temperatura en el centro de la castaña como una función de Fo teniendo como parámetro a Bi . La Figura 4: corresponde a valores de $Bi > 1$ y la Figura 5: a valores de $Bi < 1$. De un modo similar pueden calcularse perfiles para cualquier valor del radio adimensional por aplicación de la solución formal (ecuaciones [12] y [13]).

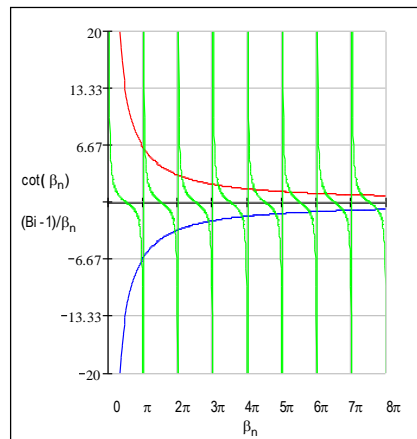


Figura 3: Raíces correspondientes a soluciones de la Ec. 1.13 para valores $Bi > 1$ y $Bi < 1$. Cada intersección entre hipérbola y cotangente corresponde a un autovalor de la solución analítica. Para el cálculo de las soluciones se tomaron en cuenta los primeros 100 autovalores.

Los subprogramas 5 a 7 permiten el cálculo de la solución formal, para el centro de la esfera, para varios valores del parámetro Bi , tanto menores a 1 como mayores o iguales a uno, en función de Fo , los mismos que fueron utilizados para la elaboración de las figuras 4 y 5.

Por otra parte, las soluciones de las ecuaciones [13] y [15] obtenidas por aplicaciones reiteradas del subprograma *root*® de Mathcad 11, utilizando el algoritmo de Müller, y con base a los subprogramas 8, 9 10 y 11, permiten obtener valores de Fo_{eq} para arreglos de grupos adimensionales de Bi , tal como se muestra en la Tabla 3, para los casos de $Bi < 1$ y $Bi \geq 1$. Estos valores han sido correlacionados mediante análisis de regresión empleando algoritmos de optimización no lineales.

Las ecuaciones de ajuste para $Fo_{eq} = Fo_{eq}(Bi)$ son respectivamente para $Bi < 1$ y para $Bi \geq 1$

$$Fo_{eq} = e^{-1.068 \ln(Bi) + 0.956} \quad [19]$$

$$Fo_{eq} = e^{0.936 e^{-1.565 \ln(Bi) + 0.093}} \quad [20]$$

que corresponden respectivamente a las ecuaciones de ajuste siguientes

$$\ln(Fo_{eq}) = -1.068 \ln(Bi) + 0.956 \quad [21]$$

$$\ln(Fo_{eq}) = 0.936 e^{-1.565 \ln(Bi) + 0.093} \quad [22]$$

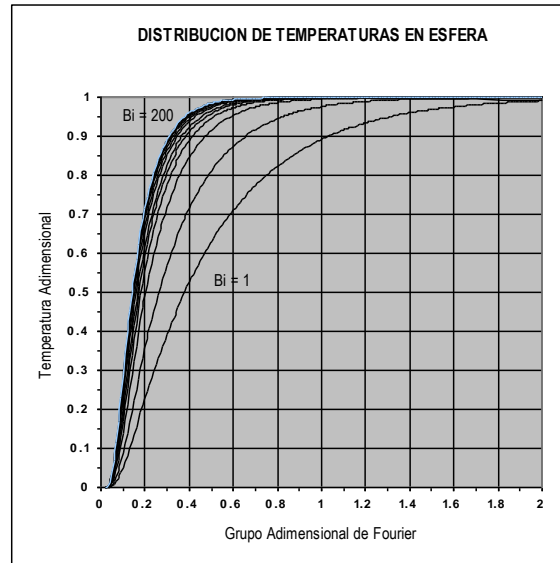


Figura 4: Distribución de temperatura adimensional $\Pi(Fo,0)$ para el centro de la esfera como una función del grupo adimensional de Fourier, Fo teniendo como parámetro el grupo de Biot. Los valores de Bi son: 1, 2, 4, 6, 8, 10, 15, 20, 30, 40, 50, 100 y 200.

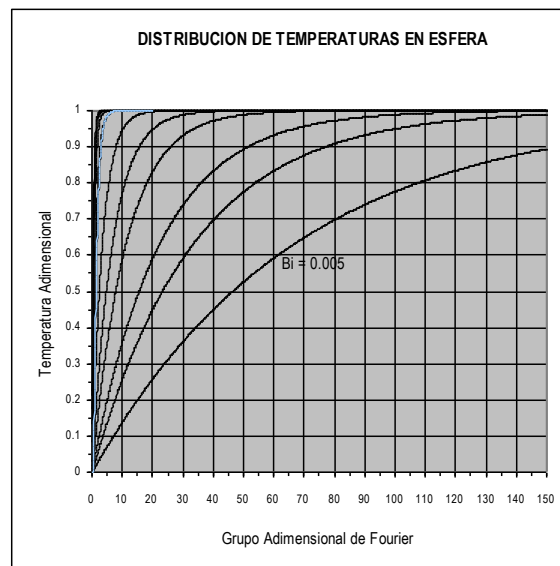


Figura 5: Distribución de temperatura adimensional $\Pi(Fo,0)$ para el centro de la esfera como una función del grupo adimensional de Fourier, Fo teniendo como parámetro el grupo de Biot. Los valores de Bi son: 0.005, 0.01, 0.015, 0.03, 0.05, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9 y 0.98.

La calidad del ajuste puede apreciarse en las figuras 6 y 7, con coeficientes de correlación de Pearson superiores a 0.98. Por lo tanto, la Ecuación [16] queda ahora totalmente definida y se tienen las siguientes expresiones para los tiempos requeridos para alcanzar el equilibrio en el caso de resistencia externa finita a la transferencia de calor.

$$t_{eq} = \frac{e^{-1.068 \ln(Bi) + 0.956} a^2 \rho c}{k_e} \quad [23]$$

para $Bi < 1$ y

$$t_{eq} = \frac{e^{0.936 e^{-1.565 \ln(Bi) + 0.093}} a^2 \rho c}{k_e} \quad [24]$$

para $Bi \geq 1$.

Estas ecuaciones pueden ser utilizadas a condición de que se pueda determinar el coeficiente de transferencia de calor por convección y la conductividad térmica efectiva y de esta manera obtener el Bi correspondiente. Para el primero la literatura es amplia y el segundo puede determinarse experimentalmente.

Se puede diseñar experimentos sencillos conducentes a la determinación de la variación de la temperatura con el tiempo en el centro de las castañas, registrando los tiempos en los que se alcanza la temperatura de equilibrio, y con esta información y la relativa a la geometría de los frutos validar el modelo obteniendo el grupo adimensional de Bi que ajuste los datos. Para hacerlo, los requerimientos computacionales son modestos y requieren cuando más de algoritmos numéricos heurísticos de optimización. El modelo validado entonces podría en principio aplicarse de una manera rutinaria, ajustándolo periódicamente para tomar en cuenta las variaciones naturales en la castaña recolectada, y de esta manera determinar esquemas adecuados de tratamiento, especialmente en lo relativo al secado.

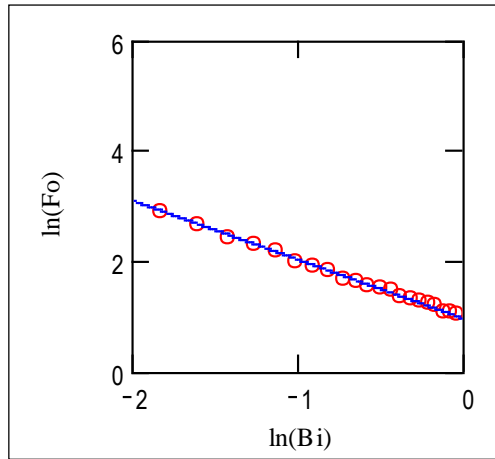


Figura 6: Fo vs Bi para $Bi < 1$

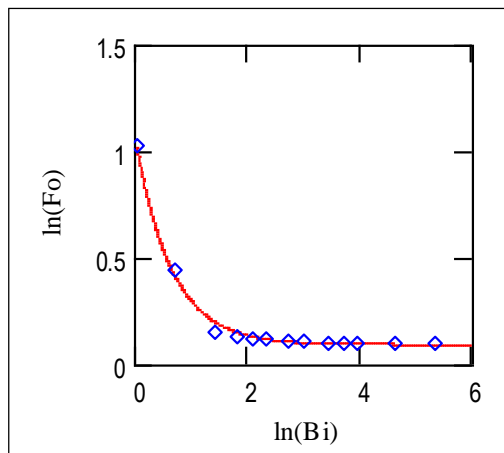


Figura 7: Fo vs Bi para $Bi > 1$

Tabla 1. Autovalores correspondientes a la ecuación $\beta_n \cot \beta_n + Bi - 1 = 0$ para $Bi > 1$. Nótese que se incluye los 25 primeros autovalores para valores seleccionados del grupo adimensional de Biot, Bi.

	Bi = 1	Bi = 2	Bi = 4	Bi = 6	Bi = 8	Bi = 10	Bi = 15	Bi = 20	Bi = 30	Bi = 40	Bi = 50	Bi = 100	Bi = 200
β_1	15.708	20.288	24.556	26.537	27.654	28.363	29.349	29.857	30.372	30.632	30.788	31.102	31.259
β_2	47.124	49.132	52.329	54.544	56.078	57.172	58.852	59.783	60.766	61.273	61.582	62.204	62.518
β_3	7.854	79.787	82.045	83.913	85.406	86.587	88.605	89.831	91.201	91.933	92.384	93.308	93.777
β_4	109.956	110.855	11.256	114.086	115.408	116.532	118.634	120.029	121.691	122.618	12.32	124.414	125.036
β_5	141.372	142.074	143.434	144.699	145.847	146.869	148.917	150.384	152.245	153.334	154.034	155.521	156.296
β_6	172.788	173.364	17.449	175.562	176.562	177.481	179.414	180.887	18.287	184.085	184.888	186.632	187.556
β_7	204.204	204.692	205.652	206.578	207.458	208.282	210.082	211.522	213.564	214.876	215.764	217.746	218.816
β_8	235.619	236.043	236.879	237.693	238.475	239.218	240.884	24.227	244.326	245.705	246.664	248.865	250.077
β_9	267.035	267.409	26.815	268.874	269.576	27.025	271.792	273.114	275.152	276.575	277.589	279.987	281.339
β_{10}	298.451	298.786	29.945	300.102	300.738	301.354	302.782	304.037	306.036	307.483	30.854	311.114	312.601
β_{11}	329.867	33.017	330.772	331.365	331.946	332.511	333.838	335.026	336.973	338.428	339.516	342.247	343.864
β_{12}	361.283	36.156	36.211	362.653	363.187	363.709	364.946	366.071	367.958	369.408	370.517	373.385	375.128
β_{13}	392.699	392.954	39.346	393.961	394.455	39.494	396.097	397.161	398.984	400.421	401.542	404.528	406.393
β_{14}	424.115	424.351	42.482	425.285	425.745	426.196	427.281	42.829	430.048	431.465	43.259	435.677	437.658
β_{15}	455.531	45.575	456.188	456.622	457.051	457.473	458.494	459.452	461.145	462.536	463.661	466.833	468.925
β_{16}	486.947	487.152	487.561	487.968	488.371	488.768	489.731	490.641	492.271	493.633	494.753	497.994	500.192
β_{17}	518.363	518.556	51.894	519.323	519.702	520.076	520.988	521.854	523.422	524.754	525.864	529.162	531.461

	Bi = 1	Bi = 2	Bi = 4	Bi = 6	Bi = 8	Bi = 10	Bi = 15	Bi = 20	Bi = 30	Bi = 40	Bi = 50	Bi = 100	Bi = 200
β_{18}	549.779	549.961	550.323	550.684	551.042	551.397	552.261	553.088	554.597	555.896	556.994	560.336	562.731
β_{19}	581.195	581.367	58.171	582.052	582.391	582.727	583.549	584.338	585.791	587.058	588.141	591.517	594.002
β_{20}	612.611	612.774	613.099	613.424	613.746	614.066	614.849	615.604	617.004	618.238	619.304	622.704	625.274
β_{21}	644.026	644.182	644.492	64.48	645.107	645.412	64.616	646.883	648.233	649.435	650.483	653.897	656.548
β_{22}	675.442	67.559	675.886	676.181	676.474	676.765	67.748	678.174	679.476	680.646	681.675	685.097	687.823
β_{23}	706.858	70.7	707.282	707.564	707.844	708.123	708.808	709.475	710.732	71.187	71.288	716.303	719.099
β_{24}	738.274	73.841	73.868	73.895	739.218	739.485	740.144	740.785	74.2	743.107	744.098	747.515	750.376
β_{25}	76.969	76.982	77.008	770.338	770.596	770.852	771.485	772.103	773.278	774.356	775.326	778.733	781.655

Tabla 2. Autovalores correspondientes a la ecuación $\beta_n \cot \beta_n + Bi - 1 = 0$ para $Bi < 1$. Nótese que se incluye los 25 primeros autovalores para valores seleccionados del grupo adimensional de Biot.

	Bi=0.001	Bi=0.003	Bi=0.006	Bi=0.01	Bi=0.015	Bi=0.03	Bi=0.05	Bi=0.1	Bi=0.3	Bi=0.5	Bi=0.7	Bi=0.9	Bi=0.98
β_1	0.055	0.095	0.134	0.173	0.212	0.299	0.385	0.542	0.921	1.166	1.353	1.504	1.558
β_2	4.494	4.494	4.495	4.496	4.497	4.5	4.505	4.516	4.56	4.604	4.648	4.691	4.708
β_3	7.725	7.726	7.726	7.727	7.727	7.729	7.732	7.738	7.764	7.79	7.816	7.841	7.851
β_4	10.904	10.904	10.905	10.905	10.905	10.907	10.909	10.913	10.932	10.95	10.968	10.986	10.994
β_5	14.066	14.066	14.067	14.067	14.067	14.068	14.07	14.073	14.088	14.102	14.116	14.13	14.136
β_6	17.221	17.221	17.221	17.221	17.222	17.222	17.224	17.227	17.238	17.25	17.261	17.273	17.278
β_7	20.371	20.371	20.372	20.372	20.372	20.373	20.374	20.376	20.386	20.396	20.406	20.415	20.419
β_8	23.519	23.52	23.52	23.52	23.52	23.521	23.522	23.524	23.532	23.541	23.549	23.558	23.561
β_9	26.666	26.666	26.666	26.666	26.667	26.667	26.668	26.67	26.677	26.685	26.692	26.7	26.703
β_{10}	29.812	29.812	29.812	29.812	29.812	29.813	29.813	29.815	29.822	29.828	29.835	29.842	29.844
β_{11}	32.956	32.956	32.957	32.957	32.957	32.957	32.958	32.959	32.965	32.972	32.978	32.984	32.986
β_{12}	36.101	36.101	36.101	36.101	36.101	36.101	36.102	36.103	36.109	36.114	36.12	36.126	36.128
β_{13}	39.244	39.245	39.245	39.245	39.245	39.245	39.246	39.247	39.252	39.257	39.262	39.267	39.269
β_{14}	42.388	42.388	42.388	42.388	42.388	42.389	42.389	42.39	42.395	42.4	42.404	42.409	42.411
β_{15}	45.531	45.531	45.531	45.531	45.531	45.532	45.532	45.533	45.538	45.542	45.547	45.551	45.553
β_{16}	48.674	48.674	48.674	48.674	48.674	48.675	48.675	48.676	48.68	48.684	48.689	48.693	48.694
β_{17}	51.817	51.817	51.817	51.817	51.817	51.818	51.818	51.819	51.823	51.827	51.83	51.834	51.836

	Bi=0.001	Bi=0.003	Bi=0.006	Bi=0.01	Bi=0.015	Bi=0.03	Bi=0.05	Bi=0.1	Bi=0.3	Bi=0.5	Bi=0.7	Bi=0.9	Bi=0.98
β₁₈	54.96	54.96	54.96	54.96	54.96	54.96	54.961	54.961	54.965	54.969	54.972	54.976	54.977
β₁₉	58.102	58.102	58.102	58.102	58.103	58.103	58.103	58.104	58.107	58.111	58.114	58.118	58.119
β₂₀	61.245	61.245	61.245	61.245	61.245	61.245	61.246	61.246	61.25	61.253	61.256	61.259	61.261
β₂₁	64.387	64.387	64.387	64.387	64.387	64.388	64.388	64.389	64.392	64.395	64.398	64.401	64.402
β₂₂	67.529	67.529	67.53	67.53	67.53	67.53	67.53	67.531	67.534	67.537	67.54	67.543	67.544
β₂₃	70.672	70.672	70.672	70.672	70.672	70.672	70.672	70.673	70.676	70.679	70.682	70.684	70.686
β₂₄	73.814	73.814	73.814	73.814	73.814	73.814	73.815	73.815	73.818	73.821	73.823	73.826	73.827
β₂₅	76.956	76.956	76.956	76.956	76.956	76.956	76.957	76.957	76.96	76.963	76.965	76.968	76.969

Tabla 3. Grupos adimensionales de Fourier Fo_{eq} de equilibrio para diversos valores del grupo adimensional de Biot Bi . Estos valores son resultados de soluciones de la Ecuación [15] para valores de Bi mayores y menores a 1.

$Bi \geq 1$	Fo_{eq}	$Bi < 1$	Fo_{eq}
1	2.778	0.04	84.428
10	1.125	0.08	37.179
20	1.113	0.12	25.313
30	1.109	0.16	17.890
40	1.107	0.20	14.620
50	1.106	0.24	11.431
60	1.105	0.28	10.012
70	1.105	0.32	8.948
80	1.104	0.36	7.432
90	1.104	0.40	6.834
100	1.104	0.44	6.346
110	1.104	0.48	5.409
120	1.104	0.52	5.102
130	1.103	0.56	4.839
140	1.103	0.60	4.611
150	1.103	0.64	4.412
160	1.103	0.68	3.848
170	1.103	0.72	3.711
180	1.103	0.76	3.588
190	1.103	0.80	3.478
200	1.103	0.84	3.378
210	1.103	0.88	2.975
220	1.103	0.92	2.903
230	1.103	0.96	2.838

$$\text{eval}(\alpha, n) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \left| \begin{array}{l} a \leftarrow \frac{\pi}{2} + (i-1) \cdot \pi - 0.01 \\ b \leftarrow i \cdot \pi - 0.001 \\ r_i \leftarrow \text{root}(z \cdot \cot(z) + \alpha - 1, z, a, b) \end{array} \right. \\ r \end{array} \right.$$

Subprograma 1: Evalúa los primeros n autovalores asociados con la Ecuación [13] para un valor de $B_i = \alpha > 1$.

$$\text{Beta}(\text{Bi}, k, n) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..k \\ \left| \begin{array}{l} \beta^{(i)} \leftarrow \text{eval}(\text{Bi}_i, n) \end{array} \right. \\ \beta \end{array} \right.$$

Subprograma 2: Evalúa los primeros n autovalores asociados con la Ecuación [13] para un vector que contiene k valores de $B_i > 1$ contenidos en el vector columna B_i , que debe definirse previamente.

$$\text{eval1}(\alpha, n) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \left| \begin{array}{l} a \leftarrow (i-1) \cdot \pi + 0.0001 \\ b \leftarrow (i-1) \cdot \pi + \frac{\pi}{2} \\ r_i \leftarrow \text{root}(z \cdot \cot(z) + \alpha - 1, z, a, b) \end{array} \right. \\ r \end{array} \right.$$

Subprograma 3: Evalúa los primeros n autovalores asociados con la Ecuación [13] para un valor de $B_i = \alpha < 1$

$$\text{Beta1}(\text{Bi}, k, n) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..k \\ \left| \begin{array}{l} \beta^{(i)} \leftarrow \text{eval1}(\text{Bi}_i, n) \end{array} \right. \\ \beta \end{array} \right.$$

Subprograma 4: Evalúa los primeros n autovalores asociados con la Ecuación [13] para un vector que contiene k valores de $B_i > 1$ contenidos en el vector columna B_i , que debe definirse previamente.

$$\text{sol0}(\text{Bi}, \text{Fo}, \beta, n) := \left. \begin{array}{l} \text{sol} \leftarrow 1 - 2 \cdot \text{Bi} \cdot \sum_{i=1}^n \left[\frac{e^{-(\beta_i)^2 \cdot \text{Fo}}}{[(\beta_i)^2 + \text{Bi} \cdot (\text{Bi} - 1)]} \cdot \frac{\beta_i}{\sin(\beta_i)} \right] \\ \text{sol} \end{array} \right\}$$

Subprograma 5: Evalúa la temperatura en el centro de la esfera $\Pi(\text{Fo}, 0)$ dados Bi, Fo, el vector de n filas β que contiene los n primeros autovalores correspondientes a la Ecuación [13].

$$\text{Y}(\text{Bi}, \text{jbi}, \text{Fo}, \text{mfo}, n\beta) := \left. \begin{array}{l} \text{for } j \in 1.. \text{jbi} \\ \left| \begin{array}{l} \beta_j \leftarrow \text{eval}(\text{Bi}_j, n\beta) \\ \text{for } i \in 1.. \text{mfo} \\ Y_{i,j} \leftarrow \text{sol0}(\text{Bi}_j, \text{Fo}_i, \beta_j, n\beta) \\ Y_{i,j} \end{array} \right. \\ \text{Y} \end{array} \right\}$$

Subprograma 6: Evalúa la temperatura en el centro de la esfera $\Pi(\text{Fo}, 0)$ (Ecuación [14]) para todas las combinaciones de valores de Bi. Contenidos en el vector Bi de jbi filas, y los valores de Fo, contenidos en el vector Fo de mfo filas considerando los primeros $n\beta$ autovalores correspondientes a la Ecuación [13]. En este caso $\text{Bi} > 1$.

$$\text{YL}(\text{Bi}, \text{jbi}, \text{Fo}, \text{mfo}, n\beta) := \left. \begin{array}{l} \text{for } j \in 1.. \text{jbi} \\ \left| \begin{array}{l} \beta_j \leftarrow \text{eval}(\text{Bi}_j, n\beta) \\ \text{for } i \in 1.. \text{mfo} \\ Y_{i,j} \leftarrow \text{sol0}(\text{Bi}_j, \text{Fo}_i, \beta_j, n\beta) \\ Y_{i,j} \end{array} \right. \\ \text{Y} \end{array} \right\}$$

Subprograma 7: Evalúa la temperatura en el centro de la esfera $\Pi(\text{Fo}, 0)$ (Ecuación [14]) para todas las combinaciones de valores de Bi contenidos en el vector Bi de jbi filas, y los valores de Fo, contenidos en el vector Fo de mfo filas, considerando los primeros $n\beta$ autovalores de la Ecuación [13]. En este caso $\text{Bi} < 1$.

$$\begin{array}{l}
 \text{foeq}(Bi, n\beta) := \\
 \left. \begin{array}{l}
 f \leftarrow 1 \\
 \beta \leftarrow \text{eval}(Bi, n\beta) \\
 \text{foeq} \leftarrow \text{root} \left[\sum_{i=1}^{n\beta} \left[\frac{e^{-(\beta_i)^2 \cdot f}}{[(\beta_i)^2 + Bi \cdot (Bi - 1)]} \cdot \frac{\beta_i}{\sin(\beta_i)} \right], f \right] \\
 \text{foeq}
 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

Subprograma 8: Evalúa el valor del módulo de Fourier crítico, $F_{o_{eq}}$ para el cual se establece el equilibrio térmico. Bi es el grupo adimensional de Biot y $n\beta$ es el número de autovalores β correspondientes a soluciones de la Ecuación [13] a considerarse en la solución analítica. Soluciones para $Bi > 1$.

$$\begin{array}{l}
 \text{foequil}(Bi, nBi, n\beta) := \\
 \left. \begin{array}{l}
 \text{for } j \in 1.. nBi \\
 r_j \leftarrow \text{foeq}(Bi_j, n\beta) \\
 r
 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

Subprograma 9: Evalúa el valor de los módulos de Fourier crítico, $F_{o_{eq}}$ para todos los valores del vector Bi de valores del grupo de Biot (nBi componentes), tomando en cuenta los primeros $n\beta$ autovalores del arreglo β de las soluciones de la Ecuación [13] a considerarse en la solución analítica. Soluciones para $Bi > 1$.

$$\begin{array}{l}
 \text{foeq1}(Bi, n\beta) := \\
 \left. \begin{array}{l}
 f \leftarrow 1 \\
 \beta \leftarrow \text{eval1}(Bi, n\beta) \\
 \text{foeq1} \leftarrow \text{root} \left[\sum_{i=1}^{n\beta} \left[\frac{e^{-(\beta_i)^2 \cdot f}}{[(\beta_i)^2 + Bi \cdot (Bi - 1)]} \cdot \frac{\beta_i}{\sin(\beta_i)} \right], f \right] \\
 \text{foeq1}
 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

Subprograma 10: Evalúa el valor del módulo de Fourier crítico, $F_{o_{eq}}$ para el cual se establece el equilibrio térmico. Bi es el grupo adimensional de Biot y $n\beta$ es el número de autovalores β correspondientes a soluciones de la Ecuación [13] a considerarse en la solución analítica. Soluciones para $Bi < 1$.

fo1equl (Bi, nBi, nβ) :=	for j ∈ 1.. nBi r _j ← foeq1 (Bi _j , nβ) r
--------------------------	---

Subprograma 11: Evalúa el valor de los módulos de Fourier crítico, F_{oeq} para todos los valores del vector Bi de valores del grupo de Biot (nBi componentes), tomando en cuenta los primeros $n\beta$ autovalores del arreglo β correspondientes a soluciones de la Ecuación [13] a considerarse en la solución analítica. Soluciones para $Bi < 1$.

Referencias Bibliográficas

- [1] Bird R.B., W.E. Stewart y E.N. Lightfoot, “*Transport Phenomena*”, John Wiley & Sons, Inc 2nd Ed. (2002)
- [2] Crank J., “*The Mathematics of Diffusion*”, Oxford University Press, (1970)
- [3] Carslaw H.S. y J. C. Jaeger, “*Conduction of Heat in Solids*”, 2nd Ed., Oxford University Press, (1959)
- [4] Churchill, R.V., “*Operational Mathematics*”, 2nd Ed., McGraw-Hill Book Company, (1958)
- [5] Churchill, R.V., “*Fourier Series and Boundary Value Problems*”, 2nd Ed., McGraw-Hill Book Company, (1963)
- [6] Lamb, G.L., Jr, “*Introductory Applications of Partial Differential Equations*”. John Wiley & Sons, Inc. (1995)
- [7] Moon, P. y D.E. Spencer, “*Partial Differential Equations*”, D.C. Heath and Company, (1969)