Recibido: 8 de febrero 2016 Aceptado: 27 de febrero 2016

Construcción axiomática del conjunto de los números naturales a partir de una condición sobre su cardinalidad

Axiomatic construction of the set of natural numbers from a condition on its cardinality.

Oscar R. Pino Ortiz[1] y Zonia K. Morales Salomón[2]

[1]Universidad Católica Boliviana, Cochabamba, Bolivia

[2]Universidad Simón I. Patiño, Cochabamba, Bolivia

pino@ucbcba.edu.bo

Resumen: Se construye la estructura algébrica de $\mathbb{N}$ a partir de un conjunto de cardinalidad $\aleph_0$. Como consecuencia el axioma de inducción de Peano se presenta como un teorema.

Palabras clave: Peano, Cantor, Números naturales, Inducción.

Abstract: The algebraic structure of $\mathbb{N}$ is constructed from a set of cardinality $\aleph_0$. As a result the induction Peano axiom is presented as a theorem.

Key words: Peano, Cantor, Natural numbers, Induction.

1 Introducción

Se dan por conocidas la Teoría Axiomática de Conjuntos, el Axioma de Elección y la Teoría de la Cardinalidad de Georg Cantor. Clásicamente $\mathbb{N}$ es construido a partir de los axiomas de Giuseppe Peano. En el cuerpo del artículo se lo construirá utilizando una característica fundamental de $\mathbb{N}$: su cardinalidad. En efecto $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito pero cuya cardinalidad es la más pequeña entre las cardinalidades de los conjuntos infinitos. La estructura algébrica de $\mathbb{N}$ y, en particular, la inducción matemática que caracteriza esa estructura puede ser construida de manera formal a partir de este hecho, siempre que se dé por válido el axioma de elección.

2 Generalidades

Definición 1. Conjunto infinito

Decimos que un conjunto A es infinito si tiene la misma cardinalidad que una de sus partes propias, es decir:

A es infinito $\Leftrightarrow \exists\ \phi: A \longrightarrow A$ inyectiva, no sobreyectiva.

Categoría de los Conjuntos

La clase de los conjuntos provisto de las aplicaciones como morfismos es una categoría. Los objetos de esta categoría admiten un orden natural que notaremos $\preccurlyeq$

Definición 2.

Diremos que $A \preccurlyeq B$ si es posible encontrar una aplicación inyectiva de *A* en *B*. Es decir:

$A \preccurlyeq B \Leftrightarrow \exists\ \gamma: A \longrightarrow B$ inyectiva.

Leeremos "*A* es más pequeño o igual a *B* ".

Diremos que $A \equiv B$ si es posible encontrar una aplicación biyectiva de *A* en *B*. Es decir:

$A \equiv B \Leftrightarrow \exists\ \gamma: A \longrightarrow B$ biyectiva.

Observación

Es evidente que

$A \preccurlyeq A$ (reflexividad)

$A \preccurlyeq B$ y $B \preccurlyeq C \Rightarrow A \preccurlyeq C$ (transitividad)

Mientras que la anti simetría $A \preccurlyeq B$ y $B \preccurlyeq A \Rightarrow A \equiv B$ es el famoso Teorema de Cantor-Bernstein.

Definición 3. Conjunto infinito más pequeño

Sea A un conjunto infinito. Decimos que *A* es uno de los conjuntos infinitos más pequeños si $\forall\ B$ conjunto, $\exists\ \varphi: A \longrightarrow B$ inyectiva.

Llamemos $\mathbb{N}$ a uno de los conjuntos infinitos más pequeños.

Definición 4. Los números naturales

Los elementos del conjunto $\mathbb{N}$ serán llamados "números naturales" aunque su naturaleza de números será establecida posteriormente una vez que se determine la estructura algébrica de $\mathbb{N}$.

Teorema 1.

X es un conjunto infinito $\Leftrightarrow$ $\exists\, \varphi: X \longrightarrow X$ inyectiva tal que $Im(\varphi) = X - \{a\}$, con $a \in X$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Sea X un conjunto infinito y $a \in X$.

Mostremos previamente que si X es infinito, $X - \{a\}$ también lo es. En efecto, como X es infinito, existe $\alpha: X \to X$ inyectiva, no sobreyectiva. Definamos $\beta: X \to X$ por:

$$\beta(x) = \begin{cases} x & si\ x \neq a\ \ y\ \ x \neq \alpha(a) \\ a & si\ x = \alpha(a) \\ \alpha(a) & si\ x = a \end{cases}$$

β es evidentemente biyectiva. Consideramos ahora la composición $\gamma = \beta \circ \alpha : X \to X$. Está claro que $\gamma(a) = a$ por lo tanto $\gamma|_{X-\{a\}} :\ X - \{a\} \to X - \{a\}$ es inyectiva y no sobreyectiva. Concluimos que $X - \{a\}$ es infinito. Ambos conjuntos son de idéntica cardinalidad pues existe una biyección entre los dos, ya que la inclusión de $X - \{a\}$ en X es inyectiva y es posible construir una inyección de X en $X - \{a\}$ a partir de $\alpha: X \to X$. Para ello consideramos dos casos si $a \notin Im(\alpha)$, en cuyo caso $\alpha: X \to X - \{a\}$ es inyectiva, y si $a \in Im(\alpha)$ definimos $\alpha': X \to X - \{a\}$ por:

$$\alpha'(x) = \begin{cases} \alpha(x) & si\ x \neq b\ \ con\ \alpha(b) = a \\ c & si\ x = b\ \ con\ \alpha(b) = a \end{cases} \quad \text{donde } c \notin Im(\alpha).$$

El teorema de Cantor-Bernstein garantiza la existencia de la biyección deseada.

En resumen: $\#X - \{a\} = \#X$ de donde $\exists\, \delta: X \longrightarrow X - \{a\}$ biyectiva.

Pero $\exists\, i: X - \{a\} \longrightarrow X$ inyectiva (por ejemplo la inclusión)

Si definimos $\varphi = i \circ \delta: X \longrightarrow X$, vemos que φ es inyectiva y tal que

$$Im(\varphi) = X - \{a\}$$

($\Leftarrow$) Como φ es inyectiva pero no sobreyectiva entonces X es infinito

Definición 5. Aplicación "sucesor"

Como $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito, por el anterior teorema podemos afirmar que existe una función $s: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ inyectiva tal que $Im(s) = \mathbb{N} - \{a\}$, con $a \in \mathbb{N}$; a esta función s, se la llamará función sucesora y al elemento a se le llamará cero y se lo denotará por el símbolo $\mathbf{0}$.

Observación: Ya que s es una aplicación inyectiva, $\forall\, n \in \mathbb{N}, \exists!\ m \in \mathbb{N}\ t.q.\, s(n) = m$, entonces diremos que todo número natural tiene un único sucesor. Pero por otra parte, s no es sobreyectiva: $Im(s) = \mathbb{N} - \{0\}$, entonces diremos que todo número natural tiene antecesor excepto el cero, es decir $\forall\, m \in \mathbb{N}\, t.q.\, m \neq 0, \exists\, n \in \mathbb{N}\ t.q.$ la pre-imagen de m es n.

Teorema 2. Inducción

Sea $E \subset \mathbb{N}$ tal que:

$$0 \in E$$

$$n \in E \;\Rightarrow\; s(n) \in E$$

Entonces $E = \mathbb{N}$

Demostración:

E es infinito, en efecto:

Tomamos $\begin{array}{rccc} s_{/E}: & E & \longrightarrow & E \\ & m & \longrightarrow & s(m) \end{array}$ donde s es la función sucesora.

$0 \in E$ Pero $0 \notin s(E) = Im(s_{/E})$, porque 0 no tiene antecesor.

Por lo tanto $s_{/E}$ no es sobreyectiva pero si inyectiva, entonces concluimos que E es infinito.

Se mostrará que $E = \mathbb{N}$:

Como $\mathbb{N}$ es uno de los conjuntos infinitos más pequeños $\exists\, \varphi: \mathbb{N} \longrightarrow E$ inyectiva.

Si $0 \notin Im(\varphi)$ podemos fabricar una función inyectiva $\varphi': \mathbb{N} \longrightarrow E$ tal que $0 \in Im(\varphi')$ de la manera siguiente: Sea $c \in Im(\varphi)$.

$$\begin{array}{rccc} \varphi': & \mathbb{N} & \longrightarrow & E \\ & \varphi^{-1}(c) & \mapsto & 0 \\ & 0 \neq a \neq \varphi^{-1}(c) & \mapsto & \varphi(a) \end{array}$$

Supongamos entonces $0 \in Im(\varphi)$.

Construimos las siguientes funciones inyectivas:

$$\begin{array}{llcl}\varphi_0: & \mathbb{N} & \longrightarrow & E \\ & 0 & \mapsto & 0 \\ & \varphi^{-1}(0) & \mapsto & \varphi(0) \\ & 0 \neq a \neq \varphi^{-1}(0) & \mapsto & \varphi(a)\end{array}$$

$$\begin{array}{llcl}\varphi_{\mathcal{S}(k)}: & \mathbb{N} & \longrightarrow & E \\ & \mathcal{S}(k) & \mapsto & \mathcal{S}(k) \\ & {\varphi_k}^{-1}(\mathcal{S}(k)) & \mapsto & \varphi_k(\mathcal{S}(k)) \\ & \mathcal{S}(k) \neq a \neq {\varphi_k}^{-1}(\mathcal{S}(k)) & \mapsto & \varphi_k(a)\end{array}$$

Donde $k \in \mathbb{N}$

Por otra parte, se define el siguiente conjunto: $F_k = \{n \in \mathbb{N} \,|n \neq \varphi_k(n)\}$ y notamos que $F_{\mathcal{S}(k)} \subset F_k$, tomando $F = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k$, observamos que $F = \emptyset$.

Por el Axioma de Elección entonces podemos construir la siguiente función biyectiva:

$$\begin{array}{lcl}\phi: \mathfrak{D} & \longrightarrow & \mathfrak{F} \\ \varphi_k & \longrightarrow & F_k\end{array}$$

Donde $\mathfrak{D} = \{\varphi_k | k \in \mathbb{N}\}$ y $\mathfrak{F} = \{F_k | k \in \mathbb{N}\}$. Observamos que a F le corresponde la función $\begin{array}{lcl}\overline{\varphi}: \mathbb{N} & \longrightarrow & E \\ n & \longrightarrow & n\end{array}$ que es la inclusión de $\mathbb{N}$ en E , por consiguiente $\mathbb{N} \subset \mathrm{E}$. Pero como $\mathrm{E} \subset \mathbb{N}$, entonces $\mathrm{E} = \mathbb{N}$.

Observación: Finalmente, estando dado que $\mathbb{N}$ es tal que

$0 \in \mathbb{N}$

$\mathcal{S}: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} - \{0\}$ es biyectiva

Sea $E \subset \mathbb{N}$ tal que:

$$0 \in E$$

$$n \in E \;\Rightarrow\; \mathcal{S}(n) \in E$$

Entonces $E = \mathbb{N}$

Podemos dotarlo, de la manera clásica[1], con la estructura algébrica que habitualmente tiene.

[1] Con la adición y la multiplicación definidas por inducción.