

Modelado y simulación de sistemas utilizando MATHEMATICA®

Francisco Javier Triveño Vargas

Empresa Brasileira de Aeronáutica

e-mail: francisco.vargas@embraer.com.br

Resumen

El vertiginoso avance tecnológico en el que nos encontramos, ha establecido la necesidad de que las universidades recurran al uso de programas computacionales que permitan una continua mejora en su enseñanza tanto en ingeniería como en otras áreas. Es dentro de este contexto que el presente artículo tiene como objetivo la familiarización con el programa de computación simbólica MATHEMATICA®. Para alcanzar este objetivo el programa es empleado para obtener modelos no lineales, determinar puntos de equilibrio, obtener modelos lineales y finalmente simular el comportamiento de los modelos obtenidos. Los ejemplos en los cuales es utilizada la herramienta corresponden al péndulo ideal y al péndulo invertido.

Palabras clave: Computación Simbólica, MATHEMATICA®, Modelación, Simulación.

1 Introducción

MATHEMATICA® [8] es un paquete computacional que permite la realización de cálculos, obtención de soluciones y la visualización gráfica de las mismas, utilizando un lenguaje estrictamente simbólico. El programa en cuestión posee herramientas bastante poderosas para la representación de modelos matemáticos de un alto grado de complejidad, su solución numérica y la simulación de los mismos.

Teniendo en vista el creciente avance tecnológico y buscando un alto nivel de competitividad en el mercado profesional, diversas universidades en el mundo han introducido en sus programas de enseñanza el paquete MATHEMATICA® [3], lo que ha permitido aumentar el grado de comprensión de una amplia gama de problemas no solamente en ingeniería sino también en otras áreas [2].

Es en este sentido que el presente artículo tiene por objetivo la difusión del programa MATHEMATICA® como instrumento de modelado y simulación de sistemas mecánicos, abordando como caso de estudio el péndulo ideal y el péndulo invertido. Los resultados obtenidos, permiten mostrar y verificar de manera muy simple las ventajas de esta herramienta.

El artículo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se presentan las ecuaciones para la obtención del modelo matemático del péndulo ideal y el péndulo invertido. En la sección 3 se obtienen los modelos matemáticos utilizando MATHEMATICA®. En la sección 4 se presentan los resultados del cálculo numérico y de simulación correspondientes a los dos modelos no lineales. En la sección 5 se describen y determinan los puntos de equilibrio de los dos modelos. En la sección 6 se presenta la expansión por series de *Taylor* para la obtención de modelos lineales y se obtiene el modelo lineal del péndulo invertido. En la sección 7 se presentan los resultados de simulación de los modelos lineal y no lineal del péndulo invertido, así como las comparaciones respectivas. Finalmente en la sección 8, se plantean algunas conclusiones.

2 Modelos Matemáticos

La mayoría de los fenómenos que se presentan en la naturaleza involucran la variación de una cantidad en relación a otra, llevando naturalmente a modelos matemáticos basados en *ecuaciones diferenciales* [6]. Estas ecuaciones son obtenidas empleando leyes como la segunda ley de Newton, la ley de conservación de energía o las leyes de Kirchhoff. A seguir, se detallan los modelos matemáticos del péndulo ideal y del péndulo invertido.

2.1 El péndulo ideal

El péndulo ideal se caracteriza por ser un cuerpo puntual de masa m que se mueve sobre la acción de la fuerza del peso y la tensión T que el hilo de suspensión de longitud l ejerce en la base donde se encuentra fijada. La figura 1 ilustra este problema.

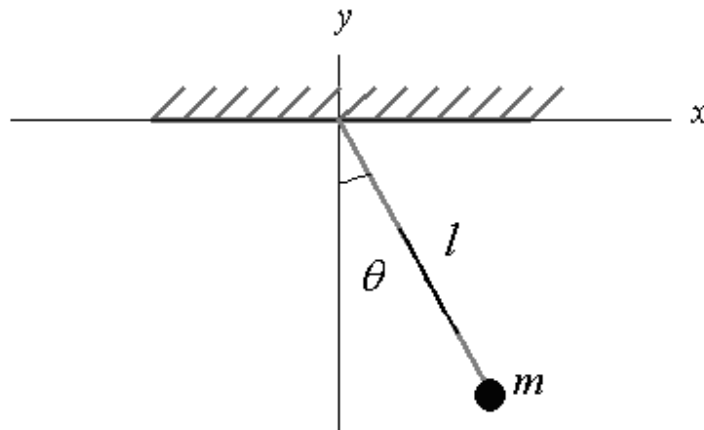


Figura 1: Péndulo ideal

Escogiendo la base o el punto de suspensión del péndulo, como el origen de un sistema cartesiano, con el eje y positivo hacia arriba, las coordenadas (x, y) de la masa

están relacionadas una a la otra a través de la ecuación $x^2 + y^2 = l^2$. Por lo tanto es conveniente estudiar su movimiento en términos del ángulo θ que el hilo de suspensión del péndulo forma con el eje vertical. Por convención, $\theta > 0$ cuando la masa se encuentra a la derecha del eje y y $\theta < 0$ cuando la masa se encuentra a la izquierda. De esta forma las variables (x, y) del sistema de coordenadas son dadas por: $x = l \text{sen} \theta$ y $y = -l \text{cos} \theta$ (por tratarse del péndulo ideal, se desprecia la fricción).

Utilizando la segunda ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a} = m(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j})$ y separando los vectores en sus respectivos componentes se obtiene:

$$m\ddot{x} = -T \text{sen} \theta \quad (1)$$

$$m\ddot{y} = -mg + T \text{cos} \theta \quad (2)$$

Multiplicando las ecuaciones (1) y (2) por $\text{cos} \theta$ y $\text{sen} \theta$ respectivamente, se obtiene la ecuación no lineal del péndulo ideal (este modelo también puede obtenerse empleando otros métodos).

2.2 El péndulo invertido

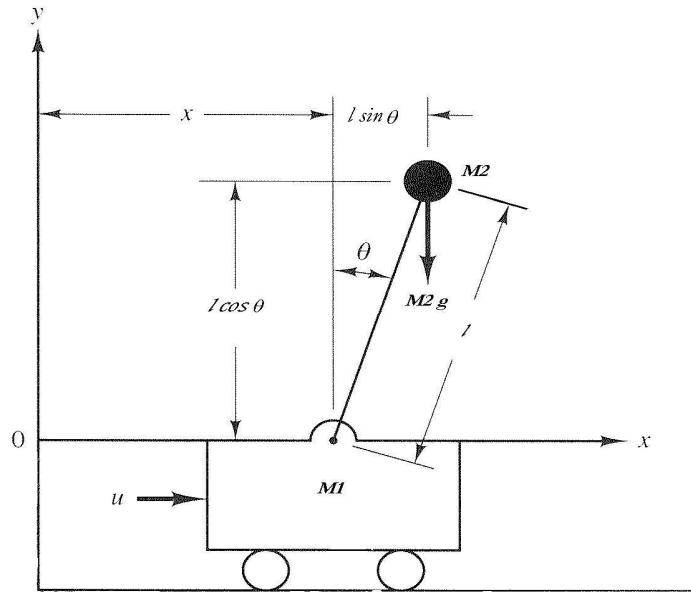


Figura 2: Péndulo invertido

El péndulo invertido consiste en un carro de masa M_1 que tiene adosada una varilla en cuyo extremo se encuentra un cuerpo de masa M_2 . El carro puede moverse hacia delante o hacia atrás en línea recta, al aplicársele una fuerza u . La varilla está unida al

centro del carro mediante una junta, que le permite girar sobre un eje situado en la junta y con un grado de libertad sobre el plano determinado por la dirección de movimiento del carro y la normal al suelo. La figura 2 ilustra el problema del péndulo invertido.

Al contrario del primer ejemplo, en este caso el modelo no lineal se obtiene empleando el método variacional a través de las ecuaciones de Lagrange [7].

$$L = T - V \quad (3)$$

donde L corresponde al Lagrangiano, T es la energía cinética y V la energía potencial.

Dada la ecuación de Lagrange, se define la siguiente función:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \right) = u_i \quad (4)$$

donde x_i y \dot{x}_i son las variables de posición y velocidad del péndulo $[\theta, x]$, $[\dot{\theta}, \dot{x}]$, u_i corresponde a las fuerzas externas actuando en el sistema relacionadas específicamente a u y a los efectos gravitacionales sobre M_2 .

Las energías cinéticas T_1 y T_2 de cada una de las masas del péndulo se definen como:

$$T_1 = \frac{1}{2} M_1 \dot{x}^2 \quad (5)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} M_2 v_2^2 \quad (6)$$

En la ecuación (6), v_2 se define a partir de la posición horizontal $p_h = x + l \sin \theta$ y la posición vertical $p_v = l \cos \theta$ de M_2 tal que:

$$v_2^2 = \left(\frac{dp_h}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dp_v}{dt} \right)^2 \quad (7)$$

Las ecuaciones (3)-(7), permiten obtener el modelo no lineal del péndulo invertido.

3 Obtención de los modelos utilizando MATHEMATICA

3.1 Modelo del péndulo ideal

Con el auxilio de MATHEMATICA® y utilizando las ecuaciones (1) y (2), el modelo del péndulo ideal se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
x[t] &= l \operatorname{sen}[\theta[t]]; \\
y[t] &= -l \operatorname{cos}[\theta[t]]; \\
\dot{x}[t] &= \partial_t x[t]; \\
\dot{y}[t] &= \partial_t y[t]; \\
\ddot{x}[t] &= \partial_t \dot{x}[t]; \\
\ddot{y}[t] &= \partial_t \dot{y}[t]; \\
\text{eqns} &= \{m\ddot{x}[t] \operatorname{Cos}[\theta[t]] = -T \operatorname{Sin}[\theta[t]] \operatorname{Cos}[\theta[t]], \\
& m\ddot{y}[t] \operatorname{Sin}[\theta[t]] = -m g \operatorname{Sin}[\theta[t]] + T \operatorname{Cos}[\theta[t]] \operatorname{Sin}[\theta[t]]\} \\
\text{FullSimplify}[\text{eqns}[1,1] + \text{eqns}[[2,1]]] &= \text{FullSimplify}[[\text{eqns}[1,2] + \text{eqns}[[2,2]]]]
\end{aligned}$$

$$l m \ddot{\theta}[t] = -g m \operatorname{Sin}[\theta[t]] \quad (8)$$

La ecuación (8) corresponde a la ecuación no lineal del péndulo ideal. Haciendo $x_1 = \theta$ y $x_2 = \dot{\theta}$ la ecuación (8) en términos de variables de estado se describe como:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1[t] &= x_2[t]; \\
\dot{x}_2[t] &= -\frac{g}{l} \operatorname{Sin}[x_1[t]];
\end{aligned} \quad (9)$$

3.2 Modelo del péndulo invertido

Con el auxilio de MATHEMATICA® y utilizando las ecuaciones (3), (4), (5), (6) y (7), el modelo del péndulo invertido es obtenido de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
T_1[t] &= \frac{1}{2} M_1 x'[t]^2 \\
Ph[t] &= x[t] + l \operatorname{Sin}[\theta[t]] \\
Pv[t] &= l \operatorname{Cos}[\theta[t]] \\
\text{aux01} &= \partial_t Ph[t] \\
\text{aux02} &= \partial_t Pv[t] \\
v_2[t] &= \text{Simplify}[\text{aux01}[t]^2 + \text{aux02}[t]^2] \\
T_2[t] &= \frac{1}{2} M_2 v_2[t] \\
L[t] &= T_1[t] + T_2[t] \\
\text{aux03}[t] &= \text{Simplify}[\partial_{x[t]} L[t]] \\
\text{aux04}[t] &= \text{Simplify}[\partial_{x[t]} L[t]] \\
\text{aux05}[t] &= \text{FullSimplify}[\partial_t \text{aux03}[t]] \\
\text{resp1} &= \text{FullSimplify}[\text{Solve}[\partial_t \text{aux03}[t] == u, \{\theta''[t]\}]]
\end{aligned}$$

```

aux06[t] = Simplify[∂θ[t]L[t]]
aux07[t] = Simplify[∂θ[t]L[t]]
aux08[t] = FullSimplify[∂taux06[[t]] - ∂taux07[[t]]]
Tv = M2 l g Sin[θ[t]]
resp2 = FullSimplify[Solve[∂taux06[t] - aux07[t] == Tv, {x''[t]}]]
resp1 /. {x''[t] → gTan[θ[t]] - lSec[θ[t]]θ''[t]}
ddtheta[t] = 
$$\frac{\text{Sec}[\theta[t]](u + l \text{Sin}[\theta[t]]M_2\theta'[t]^2 - (M_1 + M_2)(g \text{Tan}[\theta[t]] - l \text{Sec}[\theta[t]]\theta''[t]))}{lM_2}$$

ddthetaF = FullSimplify[Solve[ddtheta[t] - θ''[t] == 0, {θ''[t]}]]
ddxF = resp2 /. {θ''[t] → 
$$\frac{\text{Sec}[\theta[t]](-u + g(M_1 + M_2)\text{Tan}[\theta[t]] - lM_2\text{Tan}[\theta[t]]\theta'[t]^2)}{l(\text{Sec}[\theta[t]]^2 M_1 + M_2 \text{Tan}[\theta[t]]^2)}$$
}

```

Observando las dos últimas líneas de código, las ecuaciones para $\ddot{\theta}$ y \ddot{x} se definen como:

$$\theta''[t] \rightarrow \left\{ \frac{\text{Sec}[\theta[t]](u + l \text{Sin}[\theta[t]]M_2\theta'[t]^2 \text{Sec}[\theta[t]](M_1 + M_2)(-g \text{Sin}[\theta[t]] + l\theta''[t]))}{lM_2} \right\} \quad (10)$$

$$x''[t] \rightarrow \left\{ g \text{Tan}[\theta[t]] - \frac{\text{Sec}[\theta[t]](\text{Sec}[\theta[t]] - u + g(M_1 + M_2)\text{Tan}[\theta[t]] - lM_2\text{Tan}[\theta[t]]\theta'[t]^2)}{\text{Sec}[\theta[t]]^2 M_1 + M_2 \text{Tan}[\theta[t]]^2} \right\} \quad (11)$$

Las ecuaciones (10) y (11) corresponden al modelo no lineal del péndulo invertido [7]. Haciendo $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x_3 = x$ y $x_4 = \dot{x}$, las ecuaciones (10) y (11) son re escritas en variables de estado como:

$$\left(\begin{array}{l} \dot{x}_1[t] = x_2, \\ \dot{x}_2[t] = \frac{\text{Sec}[\theta[t]](u + l \text{Sin}[\theta[t]]M_2\theta'[t]^2 \text{Sec}[\theta[t]](M_1 + M_2)(-g \text{Sin}[\theta[t]] + l\theta''[t]))}{lM_2}, \\ \dot{x}_3[t] = x_4, \\ \dot{x}_4[t] = g \text{Tan}[\theta[t]] - \frac{\text{Sec}[\theta[t]](\text{Sec}[\theta[t]] - u + g(M_1 + M_2)\text{Tan}[\theta[t]] - lM_2\text{Tan}[\theta[t]]\theta'[t]^2)}{\text{Sec}[\theta[t]]^2 M_1 + M_2 \text{Tan}[\theta[t]]^2} \end{array} \right) \quad (12)$$

4 Simulación No Lineal - Resultados

Para realizar la simulación no lineal, se utilizan los modelos (9) y (12). Al mismo tiempo se deben considerar aspectos como el método de integración, precisión de cálculo y el número máximo de interacciones para la obtención de la solución [6].

4.1 Péndulo ideal

El cálculo numérico para la resolución de la ecuación (4) se realiza empleando la función **NDSolve** de MATHEMATICA®, de la siguiente forma:

```

x1p = x2[t];
x2p = - $\frac{g}{l}$  Sin[ $\theta[t]$ ]
eqs = {x1p, x2p} /. {g → 9.8, l → 1}
tf = 2 *  $\pi$ ;
sol = NDSolve {{x1'[t] = eqs[[1]], x2'[t] = eqs[[2]],
x1[0] == 0.1, x2[0] == 0}, {x1, x2}, {t, 0, tf},
Work Precision → Machine Precision,
Method → Explicit RungeKutta ,
MaxSteps → 10000];

```

En estas líneas, se puede observar que el intervalo de tiempo se define como $\{t, 0, tf\}$, las condiciones iniciales corresponden a $[x_1 \rightarrow 0.1, x_2 \rightarrow 0]$ y los valores de g, l son 9.8 y 1 respectivamente. En este punto es importante observar que MATHEMATICA provee otros métodos de integración, varía el número de interacciones y cambia la precisión de máquina por otras. Dependiendo de estas opciones, los resultados presentarán características diferentes, llevando en algunos casos a un atraso en el cálculo de la respuesta [8].

Una vez realizado el cálculo numérico es posible visualizar el comportamiento temporal de las respuestas obtenidas a través de las siguientes instrucciones:

```

Plot[{sol[[1,1]]}, {t, 0, tf}, AxesLabel → {Tiempo, Magnitud}, PlotStyle → {Hue[.6], Dashing[{.01]}];
Plot[{sol[[1,2]]}, {t, 0, tf}, AxesLabel → {Tiempo, Magnitud}, PlotStyle → {Hue[.6], Dashing[{.01]}];

```

El comportamiento de las variables x_1 y x_2 está ilustrado en las figuras 3 y 4.

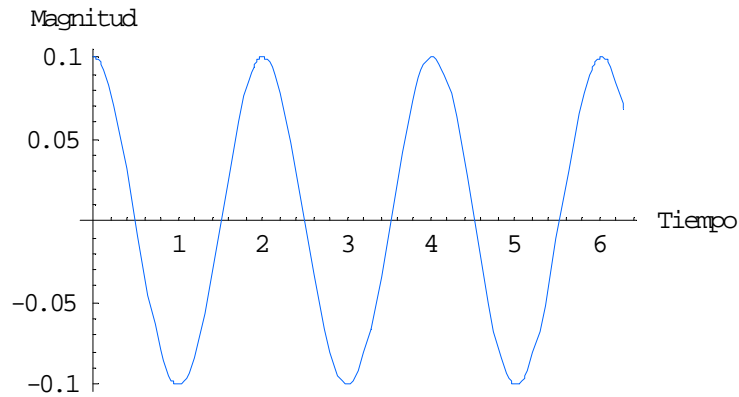


Figura 3: Variación temporal de la variable x_1

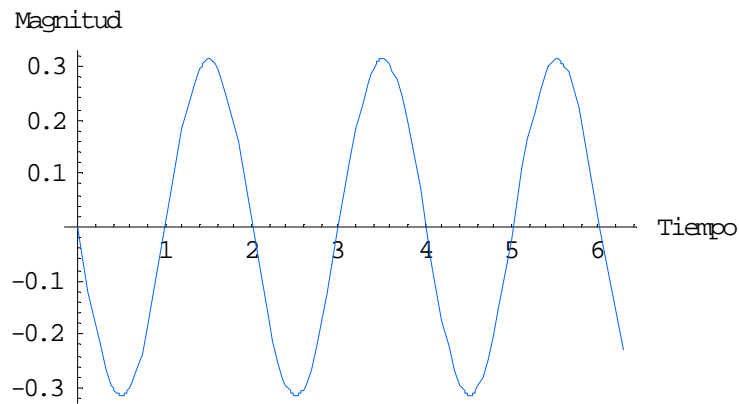


Figura 4: Variación temporal de la variable x_2

Adicionalmente, en estos resultados se puede observar que el péndulo ideal es un sistema periódico que no disipa energía, por lo que oscila de forma infinita. Estos resultados son reforzados a través del plano de fase y su respectivo campo de direcciones (el método de las *isoclinas* puede ser utilizado para este propósito). Estos resultados están ilustrados en la figura 5. Sus instrucciones son:

```
p1=ParametricPlot[Evaluate[{x1[t],x2[t]}/.sol],{t,0,tf},AspectRatio→Automatic,PlotRange→{{.4,.4},
{-4,.4}},PlotStyle→{Hue[6]},AxesLabel→{x1,x2};
direcciones = PlotVectorField[{x2,-9.8Sin[x1]},{x1,-4,.4},{x2,-4,.4}];
Show[{p1,direcciones},PlotRange→{{-4,.4},{-4,.4}},AxesLabel→{x1,x2}]
```

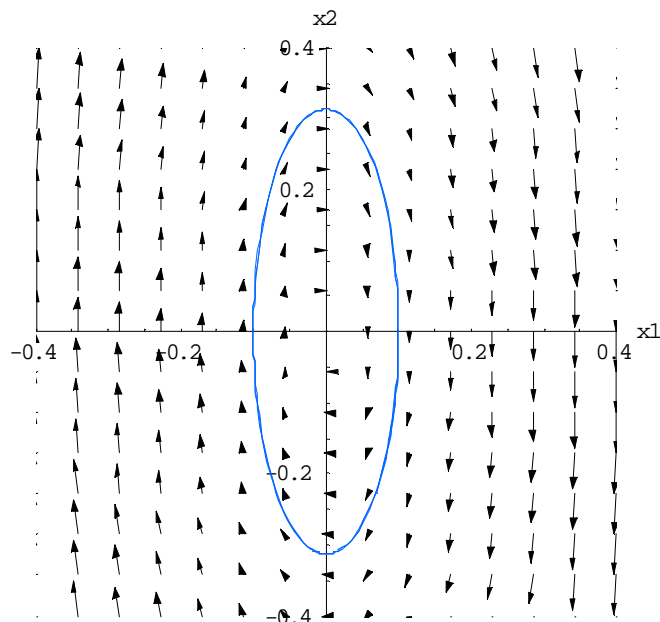


Figura 5: Plano de fase del péndulo ideal

4.2 Péndulo Invertido

El cálculo numérico para la resolución de la ecuación (12), nuevamente se realiza utilizando la función **NDSolve**:

$$\begin{aligned} & \dot{x}_3 = x_2[t], \\ \text{aux01} &= \frac{\text{Sec}[\theta[t]](u + l \text{Sin}[\theta[t]]M_2\theta'[t]^2 \text{Sec}[\theta[t]](M_1 + M_2)(-g\text{Sin}[\theta[t]] + l\theta''[t]))}{lM_2} \\ & /. \{\theta[t] \rightarrow x1, \theta'[t] \rightarrow x2[t]\} \\ & \dot{x}_3 = x_4[t], \\ \text{aux02} &= g \text{Tan}[\theta[t]] - \frac{\text{Sec}[\theta[t]](\text{Sec}[\theta[t]] - u + g(M_1 + M_2)\text{Tan}[\theta[t]] - lM_2\text{Tan}[\theta[t]]\theta'[t]^2)}{\text{Sec}[\theta[t]]^2 M_1 + M_2 \text{Tan}[\theta[t]]^2} \\ & /. \{\theta[t] \rightarrow x1, \theta'[t] \rightarrow x2[t]\} \\ \text{eqs} &= \{x2[t], \text{aux01}, x4[t], \text{aux02}\} /. \{F \rightarrow 1, g \rightarrow 9.8, l \rightarrow 1, M_2 \rightarrow 1, M_1 \rightarrow 1\}; \\ \text{tf} &= 2 * \pi; \\ \text{sol} &= \text{NDSolve}\{\{x1'[t] = \text{eqs}[[1]], x2'[t] = \text{eqs}[[2]], x3'[t] = \text{eqs}[[3]], x4'[t] = \text{eqs}[[4]], \\ & [x1[0] == 0.1, x2[0] == 0, x3[0] == 0.1, x4[0] == 0\}, \{x1, x2, x3, x4\}, \{t, 0, \text{tf}\}\}; \end{aligned}$$

Nuevamente, el intervalo de tiempo está definido como $\{t, 0, \text{tf}\}$, las condiciones iniciales corresponden a $[x_1 \rightarrow 0.1, x_2 \rightarrow 0, x_3 \rightarrow 0.1, x_4 \rightarrow 0]$ y los valores de F, g, l, M_2 y M_1 son 1, 9.8, 1, 1 y 1 respectivamente. Realizado el cálculo numérico, el comportamiento en el tiempo puede ser visualizado través de las siguientes instrucciones:

```
Plot[{x1[t]/.sol[[1,1]]}, {t, 0, tf}, AxesLabel -> {Tiempo, Magnitud};
Plot[{x2[t]/.sol[[1,2]]}, {t, 0, tf}, AxesLabel -> {Tiempo, Magnitud};
Plot[{x3[t]/.sol[[1,3]]}, {t, 0, tf}, AxesLabel -> {Tiempo, Magnitud};
Plot[{x4[t]/.sol[[1,4]]}, {t, 0, tf}, AxesLabel -> {Tiempo, Magnitud};
```

Los resultados de simulación están ilustrados en las figuras 6, 7, 8, 9 y 10.

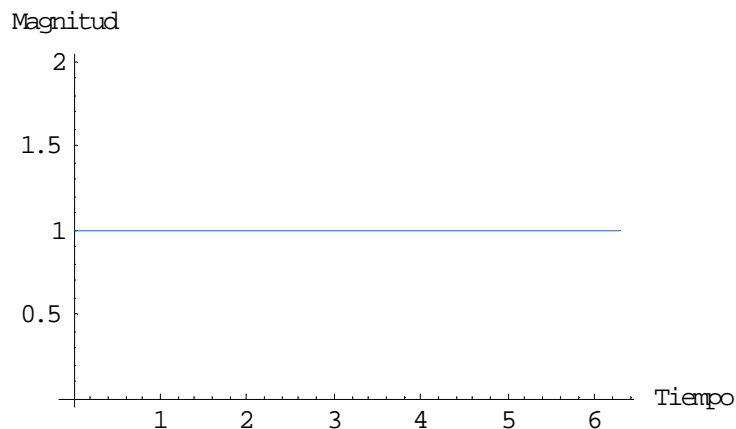


Figura 6: Variación temporal de la variable F

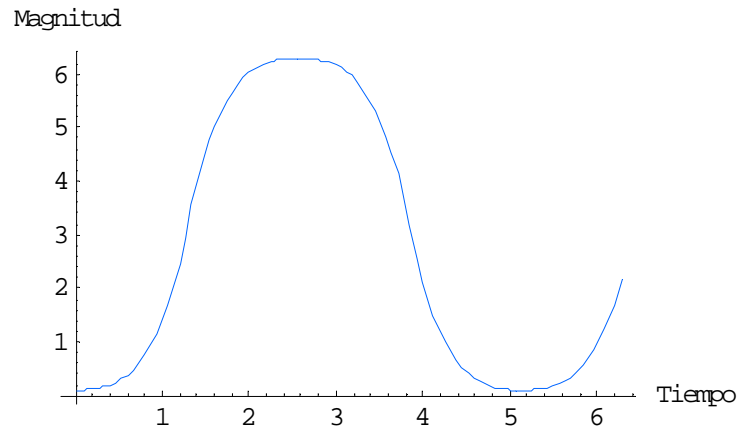


Figura 7: Variación temporal de la variable x_1

En estos resultados se puede observar que las variables $x_1 = \theta$ y $x_2 = \dot{\theta}$ tienen características periódicas para F constante (figuras 6, 7 y 8). Ya las variables $x_3 = x$ y $x_4 = \dot{x}$ son crecientes en el tiempo y presentan inestabilidad (figuras 9 y 10).

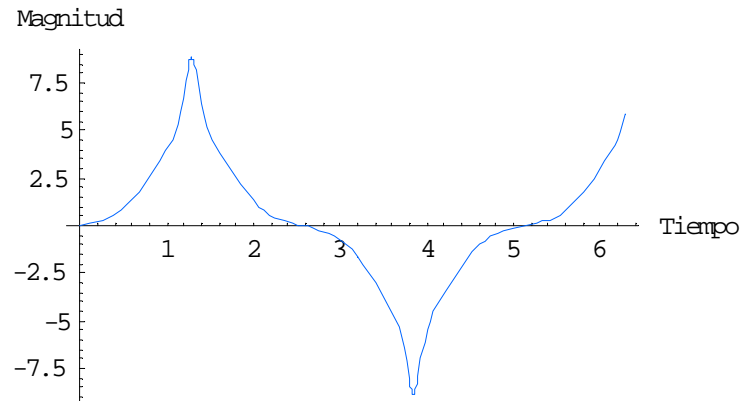


Figura 8: Variación temporal de la variable x_2

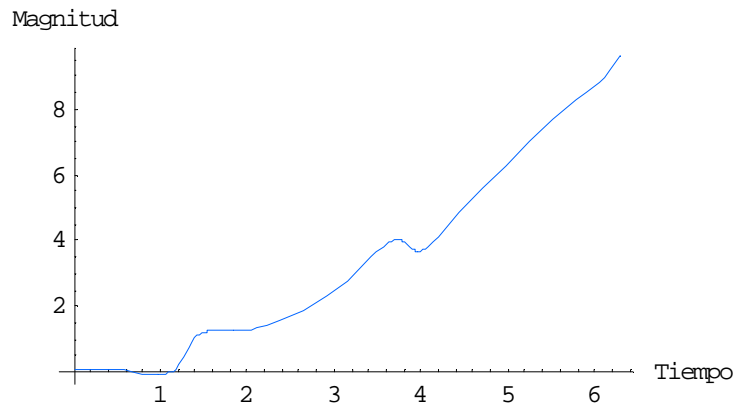


Figura 9: Variación temporal de la variable x_3

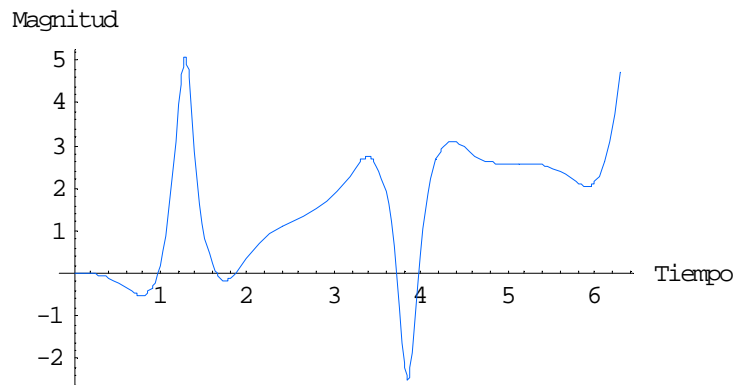


Figura 10: Variación temporal de la variable x_4

5 Puntos de Equilibrio

Un punto de equilibrio de un sistema $\dot{x} = f(x, u, t)$ es un punto x_{eq} , tal que \dot{x} en este punto sea igual a cero, ya que en estas condiciones el sistema no cambiará de estado [5]. Considerando la ecuación (9) del péndulo ideal para que \dot{x}_1 y \dot{x}_2 sean cero, es necesario que:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pm \pi \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pm 2\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \dots \quad (13)$$

Este resultado muestra que el péndulo está en reposo sólo en la dirección vertical, bien sea hacia arriba o hacia abajo. Si es hacia abajo el ángulo es cero (igual a $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$) y si está hacia arriba el ángulo es π (igual a $\pm \pi$, $\pm 3\pi$); en ambos casos la velocidad angular x_2 es cero. La simplicidad que caracteriza al péndulo ideal lo describe

como un problema trivial, lo cual no sucede con el péndulo invertido como será presentado a continuación.

5.1 Determinación de los puntos de equilibrio del péndulo invertido

Re-escribiendo la ecuación (12) y haciendo $z = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ y $u = F$, se obtiene la siguiente igualdad matricial:

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = f(z, F) \quad (14)$$

Los puntos de equilibrio se obtienen haciendo las derivadas de la ecuación (14) iguales a cero.

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (15)$$

Aplicando MATHEMATICA® encima de la ecuación (12), se obtiene:

```
eqs={x2[t],aux01,x4[t],aux02}/.{x1[t]->x1,x2[t]->x2,x3[t]->x3,
x4[t]->x4}/.{x2->0,x4->0}
Solve[{eqs[[2]]==0;x1}/{F->.1,g->9.8,l->1,M2->1,M1->1}
{{x1->3.13649},{x1->3.13649},{x1->0.005102},{x1->0.005102}}
Solve[{eqs[[4]]==0;x1}/{F->.1,g->9.8,l->1,M2->1,M1->1}
{{x1->0.0102048},{x1->1.56059}}
```

Para las variables especificadas, un punto de equilibrio corresponde a $[x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0]$. Adicionalmente como se puede observar, otros 2 puntos de equilibrio son identificados. Al contrario del péndulo ideal este problema ya presenta un cierto grado de dificultad, razón por la cual en lo sucesivo se abordará solamente este ejemplo.

6 Linealización del Modelo

Se pueden aplicar diferentes técnicas y aproximaciones a los modelos no lineales para obtener otros lineales. En el caso del péndulo ideal un modelo lineal es obtenido aproximado $\sin \theta \approx \theta$, sin embargo no siempre es posible realizar este tipo de aproximaciones razón por la cual se debe recurrir a métodos formales. Para alcanzar este propósito, uno de los métodos más usados de linealización corresponde a la expansión por series de Taylor [1], [4]. Este método es bastante efectivo para pequeñas variaciones en las variables de estado con relación al punto de equilibrio. A continuación se realiza un resumen del método.

6.1 Expansión en series de Taylor

Siendo que el punto de equilibrio está dado por (z_{eq}, F_{eq}) y que la diferencia para pequeñas variaciones del vector de estados y entrada está dada por:

$$z = \Delta z + z_{eq} \quad F = \Delta F + F_{eq} \quad (16)$$

y

$$\dot{z}_{eq} = f(z_{eq}, F_{eq}) \quad (17)$$

El lado derecho de la ecuación (17) se puede expandir utilizando las series de Taylor de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{F} + \dot{z}_{eq} &= f(\Delta z + z_{eq}, \Delta F + F_{eq}) \\ &= f(z_{eq}, F_{eq}) + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{z_{eq}, F_{eq}} \Delta z + \left(\frac{\partial f}{\partial F} \right)_{z_{eq}, F_{eq}} \Delta F + \text{términos de orden elevado} \end{aligned} \quad (18)$$

Los términos de orden elevado contienen cantidades de Δz y ΔF elevadas al cuadrado; como los valores de Δz y ΔF son pequeños, estas cantidades pueden ser despreciadas. Con esta consideración, se obtiene la siguiente aproximación:

$$\Delta \dot{z} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{z_{eq}, F_{eq}} \Delta z + \left(\frac{\partial f}{\partial F} \right)_{z_{eq}, F_{eq}} \Delta F \quad (19)$$

Las derivadas parciales de la ecuación (19) corresponden a los *Jacobianos* [5] y son descritos a seguir:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{z_{eq}, F_{eq}} = A^{n \times n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} & \dots & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} & \dots & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial z_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial z_j} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1} & \frac{\partial f_n}{\partial z_2} & \dots & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial z_n} \\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1} & \frac{\partial f_n}{\partial z_2} & \dots & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial z_n} \end{bmatrix}_{z_{eq}, F_{eq}} \quad (20)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial F} \right)_{\substack{z_{eq} \\ F_{eq}}} = B^{n \times r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial F_1} & \frac{\partial f_2}{\partial F_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial F_r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial F_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial F_r} \\ \cdots & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial F_j} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial F_1} & \frac{\partial f_n}{\partial F_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial F_r} \end{bmatrix}_{\substack{x_{eq} \\ u_{eq}}} \quad (21)$$

El sistema linealizado alrededor del punto de equilibrio está dado por

$$\Delta \dot{z} = A \Delta z + B \Delta F \quad (22)$$

Finalmente haciendo $\Delta F = u$ y $\Delta z = z$, la ecuación (22) puede ser re escrita como:

$$\dot{z} = Az + Bu \quad (23)$$

donde A y B están dadas por las ecuaciones (20) y (21).

6.2 Obtención del modelo lineal del péndulo invertido con MATHEMATICA

Las matrices A y B junto con el modelo lineal se obtienen de la siguiente manera:

```
eqs={x2[t],aux01,x4[t],aux02}/.{x1[t]->x1,x2[t]->x2,x3[t]->x3,x4[t]->}
x={x1,x2,x3,x4}
A=0 IdentityMatrix[4]
Do[A[[i,j]]=FullSimplify[D_x[[j]]eqs[[i]],{j,1,4},{i,1,4}]
MatrixForm[A]
Ae=FullSimplify[A/.{x1->0,x2->0}]
```

De tal forma que la matriz A en el punto de equilibrio está dada por:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{g(M_1 + M_2)}{lM_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{gM_2}{M_1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

```
B={ {0},{0},{0},{0} };
u={F};
Do[B[[i,j]]=FullSimplify[D_u[[j]]eqs[[i]],{j,1,1},{i,1,4}]
MatrixForm[B]
Be=FullSimplify[B/.{x1->0,x2->0}]
```

La matriz B en el punto de equilibrio está dada por:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{lM_1}{M_1} \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{M_1} \end{pmatrix} \quad (25)$$

En la literatura clásica, las ecuaciones (24) y (25) se presentan directamente para su uso en diferentes aplicaciones [4].

7 Simulación lineal y no lineal del péndulo invertido - Resultados

Para obtener los resultados del modelo lineal representado por las ecuaciones (24) y (25) y compararlos con el modelo no lineal (12), el modelo no lineal se re escribe como:

```
x1p = x2[t];
x2p = aux01;
x3p = x4[t];
x4p = aux02;
x5p = 0-x3[t];
KI = -10;
KR = {-158.6130, -48.3707, -25.2051, -26.7648};
control = -KR.{x1[t], x2[t], x3[t], x4[t]}+KI*x5[t];
eqs = {x1p, x2p, x3p, x4p, x5p}/.{F -> control, g -> 9.8, l -> 1, M2 -> 1, M1 -> 1};
```

El cálculo numérico se escribe como:

```
tf = 2 * pi;
sol = NDSolve {{x1'[t] = eqs[[1]], x2'[t] = eqs[[2]], x3'[t] = eqs[[3]], x4'[t] = eqs[[4]],
x5'[t] = eqs[[5]], x1[0] == 0.5, x2[0] == 0, x3[0] == 0.5, x4[0] == 0, x5[0] == 0}, {x1, x2, x3, x4, x5},
{t, 0, tf}};
```

Ahora re-escribiendo el modelo lineal:

```
z1p = z2[t];
z2p = -\frac{FL}{lM_1} + \frac{g(M_1 + M_2)z1[t]}{lM_1};
z3p = z4[t];
z4p = \frac{FL}{M_1} - \frac{gM_2z1[t]}{M_1};
z5p = 0 - z3[t];
```

```
ctrk = -KR.{z1[t], z2[t], z3[t], z4[t]}+KI*z5[t];
eqL = {z1p, z2p, z3p, z4p, z5p}/.{F -> ctrk, g -> 9.8, l -> 1, M2 -> 1, M1 -> 1};
```

Y resolviéndolo numéricamente como:

```
solin = NDSolve {{z1'[t] = eqL[[1]], z2'[t] = eqL[[2]], z3'[t] = eqL[[3]], z4'[t] = eqL[[4]],
z5'[t] = eqL[[5]], z1[0] == 0.5, z2[0] == 0, z3[0] == 0.5, z4[0] == 0, z5[0] == 0},
{z1, z2, z3, z4, z5}, {t, 0, tf}};
```

Finalmente los resultados pueden ser visualizados como:

```
Plot[{158.613z1[t]+48.3707z2[t]+25.2051z3[t]+26.7648 z4[t]-
10z5[t]/.solin},{t,0,tf},AxesLabel→{Tiempo,Magnitud},PlotStyle→Hue[0.6]];
Plot[{z1[t]/.solin[[1,1]],x1[t]/.sol[[1,1]]},{t,0,tf},AxesLabel→{Tiempo,Magnitud},PlotStyle→{Gr
ayLevel[0],Dashing[{.03}]}];
Plot[{z2[t]/.solin[[1,2]],x2[t]/.sol[[1,2]]},{t,0,tf},AxesLabel→{Tiempo,Magnitud},PlotStyle→{Gr
ayLevel[0],Dashing[{.03}]}];
Plot[{z3[t]/.solin[[1,3]],x3[t]/.sol[[1,3]]},{t,0,tf},AxesLabel→{Tiempo,Magnitud},PlotStyle→{Gr
ayLevel[0],Dashing[{.03}]}];
Plot[{z4[t]/.solin[[1,4]],x4[t]/.sol[[1,4]]},{t,0,tf},AxesLabel→{Tiempo,Magnitud},PlotStyle→{Gr
ayLevel[0],Dashing[{.03}]}];
```

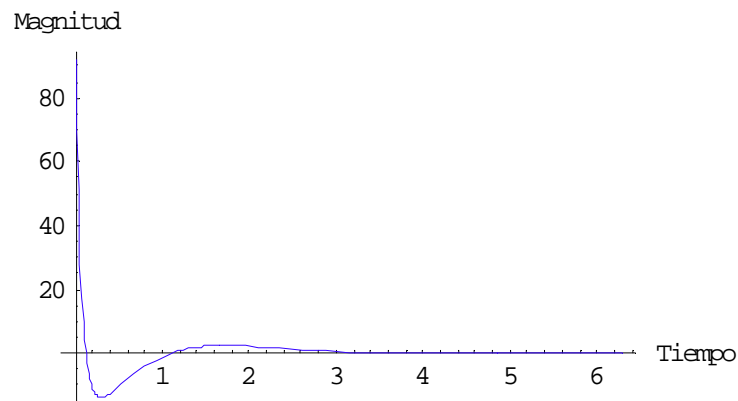


Figura 11: Variación temporal de la variable F

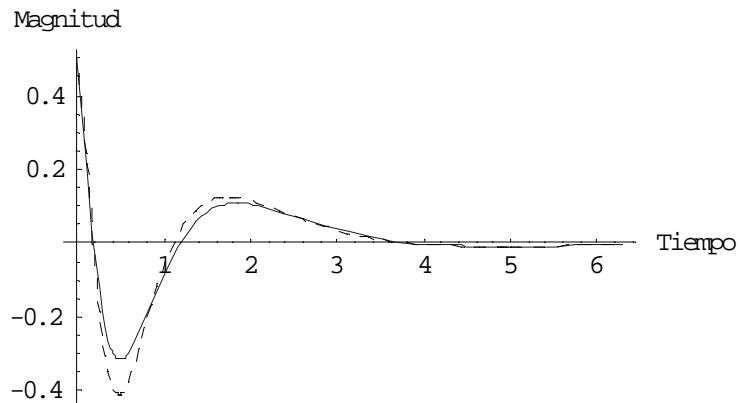


Figura 12: Variación temporal de la variable x_1 , - Lineal, - - No lineal

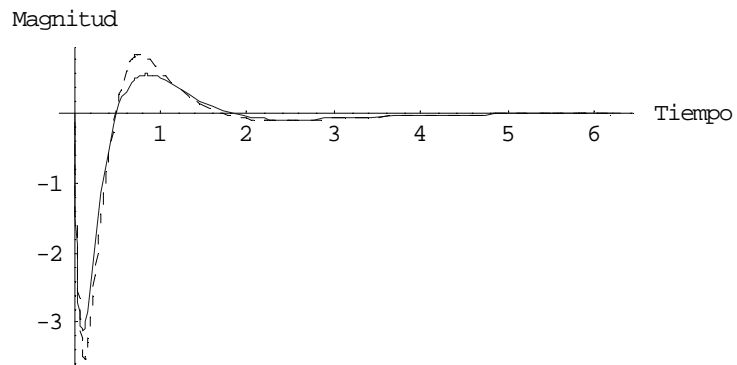


Figura 13: Variación temporal de la variable x_2 , - Lineal, - - No lineal

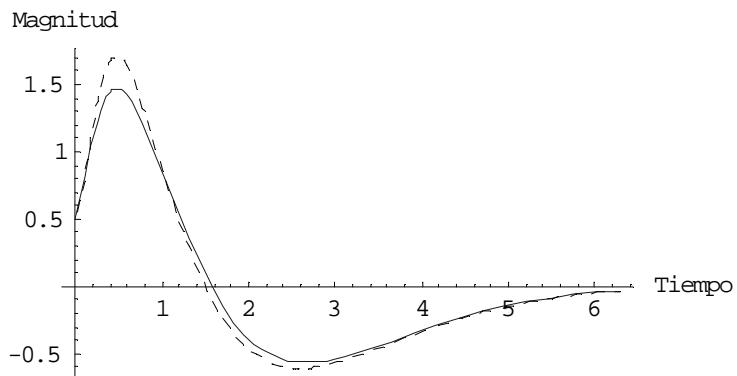


Figura 14: Variación temporal de la variable x_3 , - Lineal, - - No lineal

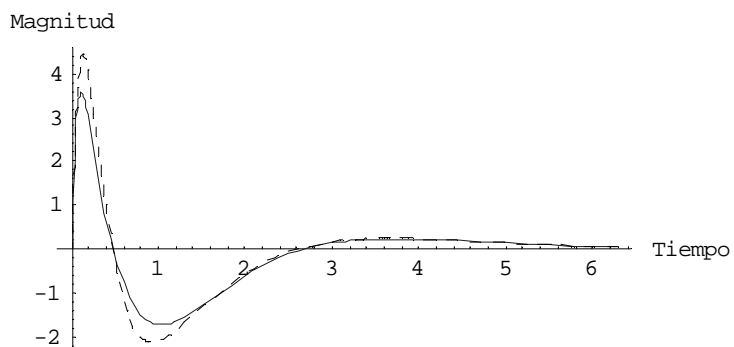


Figura 15: Variación temporal de la variable x_4 , - Lineal, - - No lineal

En estos resultados es posible observar que la diferencia entre el modelo no lineal (línea punteada) y el modelo lineal (línea sólida) es mínima para pequeñas variaciones de las variables de estado. Esta diferencia es más evidente durante el régimen transitorio y no así en el régimen permanente. La obtención de estos modelos, su análisis y simulación permiten que los mismos sean utilizados para diferentes aplicaciones en ingeniería y otras áreas [9], [10].

8 Conclusiones

En este artículo se presenta y utiliza el paquete de computación simbólica MATHEMATICA®. A través de los resultados obtenidos se ha comprobado su robustez y versatilidad.

Para alcanzar el objetivo propuesto MATHEMATICA® ha sido empleado en la modelación de sistemas mecánicos, su resolución numérica y la simulación de los mismos. Fue aplicado al caso del péndulo ideal y del péndulo invertido, los resultados alcanzados fueron satisfactorios.

Además de los resultados presentados en este trabajo, con el objetivo de difundir el uso de la herramienta, algunos cursos ya fueron patrocinados por algunas universidades [9] y por la Sociedad de Ingenieros de Bolivia [10].

Finalmente se pretende dar continuidad al objetivo de modernizar la enseñanza en nuestro medio otorgando a través de ésta y otras herramientas un alto grado de madurez tanto a alumnos como a profesores de las diferentes áreas.

Referencias

- [1] A. J. Jordan. 2006. *Linearization of Non-linear State Equation*. Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Vol. 54, N° 1
- [2] L. Kovacs, B. Benyo, B. Palancz and Z. Benyo. 2004. *A Fully Symbolic Design and Modeling of Non-Linear Glucose Control with Control System Professional Suite of Mathematica (CSPS)*. Acta Physiologica Hungarica, Vol. 91, N° 2
- [3] Jose Manuel Gutierrez and Andres Iglesias. 1998. *Mathematica Package for Analysis and Control of Chaos in Non-Linear Systems*. Computer in physics, Vol. 12, N°6
- [4] Katsuhiko Ogata. 1997. *Engenbaria de Controle Moderno*, Prentice Hall
- [5] Khalil H. K. 1996. *Non Linear Systems*. Prentice Hall
- [6] Junior E. C. y Penney D. E. 1995. *Equações Diferenciais Elementares com Problemas de Contorno*. Prentice Hall do Brasil
- [7] William A. Wolovich. 1994. *Automatic Control Systems: Basic Analysis and Design*. Oxford University Press
- [8] <http://www.wolfram.com/>

- [9] Vargas F. J. T. 2007. *Curso de Extensión: Modelaje, Simulación y Control de Sistemas*. Universidad del Valle, Cochabamba
- [10] Vargas F. J. T. 2006. *Curso Externo: Control a Estructura Variable y Modos Deslizantes*. Sociedad Boliviana de Ingenieros, SIB, Cochabamba