

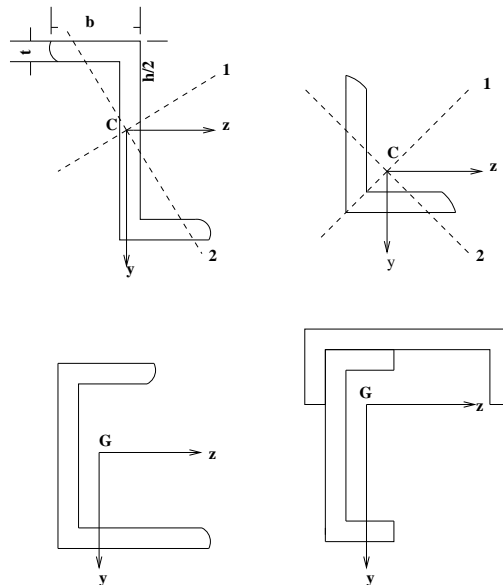
Teoría general para flexión y corte (régimen elástico)

Héctor Claiman, Cristian Reppeto

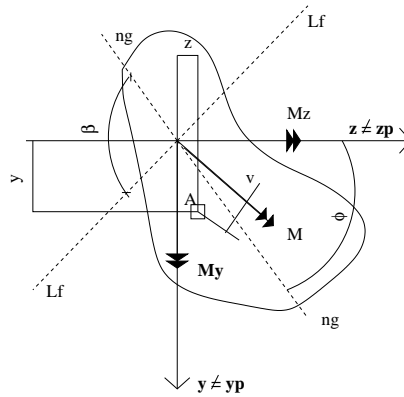
(Simplificación del método propuesto por Gere-Timoshenko)

En los capítulos 9.4 y 9.8 del libro Mecánica de los Materiales de los autores (ver apéndice en jpg) citados se aborda el problema general de la flexión y corte para el caso en que los ejes y y z no sean Principales de Inercia y por razones prácticas no se desea determinar los mismos y descomponer la flexión oblicua en dos flexiones normales como es habitual.

Este es el caso para secciones abiertas (simples o compuestas) formadas, por ejemplo, por perfiles donde no se disponen de los momentos de inercia principales y sí se cuenta (o es más fácil calcularlos) con momentos de inercia respecto a ejes ortogonales no principales. Un ejemplo de ello son las secciones que se muestran en las figuras 9.13 y 9.15 del libro de Timoshenko.



Siguiendo a Timoshenko y respetando la convención por él adoptada, para una sección cualquiera sometida a flexión:



Resulta según Timoshenko:

$$\sigma_x = \frac{(M_z \cdot J_z + M_y \cdot J_{zy})z + (M_z \cdot J_y + M_y \cdot J_{zy})y}{J_y \cdot J_z - J_{zy}^2} \quad (1)$$

Fórmula de difícil memorización, donde el eje neutro tiene por ecuación:

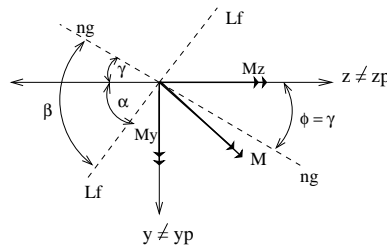
$$\text{tg}(\phi) = \frac{(M_y \cdot J_z + M_z \cdot J_{zy})}{M_z \cdot J_y + M_y \cdot J_{zy}} \quad (2)$$

más fácil en cambio es de recordar la expresión general (Fliess-11.153)

$$\sigma_x = \pm \frac{M}{J_g} \sin \beta \cdot r$$

(β menor ángulo entre L_f y n_g) y aprovechar esta expresión que formalmente es idéntica a la ecuación 2 para determinar en forma práctica las tensiones τ y σ para los casos planteados donde la misma sea de mayor utilidad.

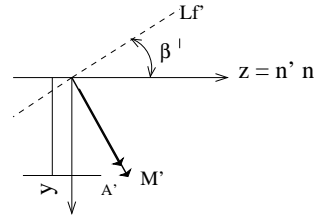
En efecto, para un par de ejes conjugados \mathbf{n} y \mathbf{v} cualesquiera siempre es posible determinar matemáticamente el ángulo que forman entre ellos (L_f y n_g son conjugados de inercia en el baricentro y para la figura dada):



En Fliess, 2do curso, figura 11.22. Los ejes z e y no son ejes principales.
Donde

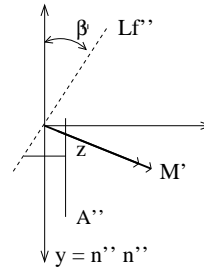
$$\operatorname{tg}(\phi) = \frac{J_z - \operatorname{tg}(\alpha) \cdot J_{zy}}{J_{yz} + \operatorname{tg}(\alpha) \cdot J_y}$$

(Dato del problema) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{M_z}{M_y}$



$$\operatorname{tg}(\beta) = \operatorname{tg}(\alpha + \phi) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{tg}(\phi)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\phi)}$$

$$\sin \beta = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}$$



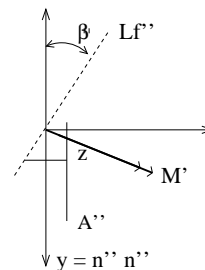
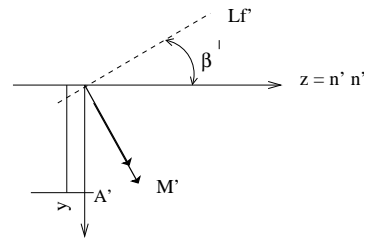
Desarrollando se puede llegar a demostrar la igualdad de las expresiones 1 y 11.153. A nosotros nos interesa M no según z e y sino asumir que z es un eje neutro $n-n$ e y es eje neutro $z-z$ en cuyo caso existen dos líneas de fuerzas, conjugadas respectivamente de ellas:

$$\sigma_x = \pm \frac{M'_z}{J_z} \sin \beta' y = \pm \frac{M''_y}{J_y} \sin \beta'' z$$

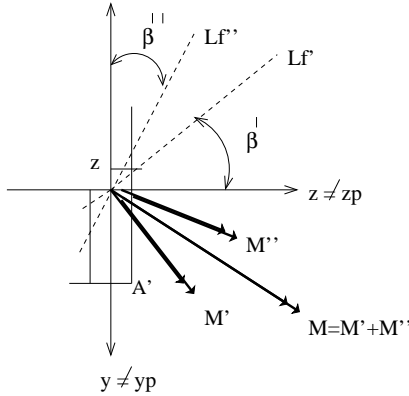
Resulta un cálculo inmediato:

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{J_z}{J_{zy}} \text{ y } \operatorname{tg} \beta'' = \frac{J_y}{J_{yz}}$$

Donde J_y , J_z y J_{zy} son conocidos.



En efecto, lo único que hemos hecho es aplicar la fórmula de la flexión oblicua descomponiendo la flexión también en coordenadas oblicuas para aprovechar el conocimiento de J_y , J_z y J_{zy} de cálculo rápido en los casos que nos interesa.

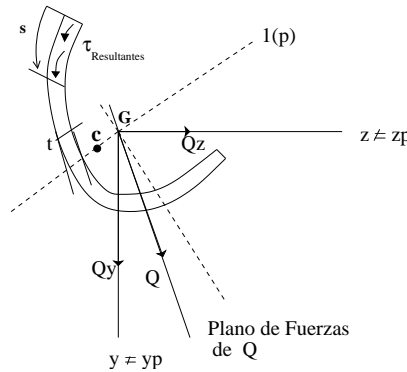


$$M \cos \alpha = M' \cos \beta' + M'' \sin \beta''$$

$$M \sin \alpha = M' \sin \beta' + M'' \cos \beta''$$

De donde se pueden encontrar M' y M'' ya que todos los datos son conocidos. Las direcciones de M' y M'' o de sus respectivas líneas de fuerzas son también las coordenadas oblicuas del problema.

Esto resulta de utilidad no tanto en flexión sino cuando quiere determinarse tensiones de corte en perfiles donde se conoce por la propiedad de los mismos (espesor delgado y distribución constante en el ancho) que la $\tau_{x\text{resultante}}$ resulta tangente a la línea media del perfil, no conociéndose su valor, pero conociéndose J_y , J_z y J_{zy} siendo z e y no principales.



El plano de corte puede no coincidir con la línea de fuerza (intersección del plano de momentos con la sección). En lugar de descomponer según **1** y **2** (z_p e y_p) se puede en forma general (Timoshenko, 9.8):

$$\tau_{x(Qy)} = \frac{Qy}{t(J_y J_z - J_{zy}^2)} \left[J_{zy} \int_0^s z \, da - J_y \int_0^s y \, da \right] \quad (3)$$

$$\tau_{x(Qz)} = \frac{Qz}{t(J_y J_z - J_{zy}^2)} \left[J_{zy} \int_0^s y \, da - J_z \int_0^s z \, da \right] \quad (4)$$

$$\tau_{x\text{Resultantes}} = \tau_{x(Qy)} + \tau_{x(Qz)}$$

(Suma algebraica porque se conocen las direcciones y todas son coincidentes).

Este procedimiento permite también, conocida la ley de distribución de las $\tau_{x\text{resultante}}$ determinar la posición del centro de corte, C, planteando la equivalencia de los momentos de las fuerzas Q_y y Q_z , respectivamente en los momentos según x de las fuerzas interiores de Corte que nos dan la abscisa y la ordenada de C. Sin embargo, son de difícil memorización y se debe ser cuidadoso con los signos, por lo que también es útil el procedimiento anterior para determinar la posición del centro de corte y las tensiones τ_r resultantes, plantearnos para Q_y solamente: (para Q_z similarmente).

$$\tau_{xR(Qy)} = \frac{Qy' \cdot Sz \cdot \sin(\beta')}{t \cdot Jz} + \frac{Qy'' \cdot Sy \cdot \sin(\beta'')}{t \cdot Jy}$$

$$Qy = Qy' \cos \beta' + Qy'' \sin \beta''$$

$$0 = Qy' \sin \beta' + Qy'' \cos \beta''$$

$$tg \beta' = \frac{Jz}{Jzy} \text{ y } tg \beta'' = \frac{Jy}{Jzy}$$

Se debe tener presente siempre, y para cualquiera de los procedimientos a utilizar, que las fórmulas nacen de suponer $dM/dx = Q$, sólo participan entonces aquellos M variables con x. Las fuerzas de resbalamiento son las originadas por ellos. Por ejemplo, si existieran pares constantes en una dirección y flexión variable en otra, la línea de fuerza (que resulta de componer todos los momentos) no coincide con la traza del plano de corte que es la que se utiliza).

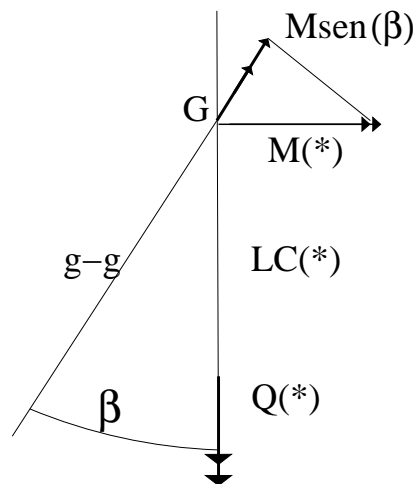
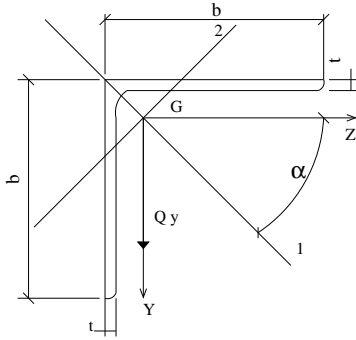


Figura 1: (*)LC debe ser producida por flexión y corte (flexión variable). No adicionar si hay casos de flexión sin corte (flexión constante).

Ejemplo:
En forma genérica

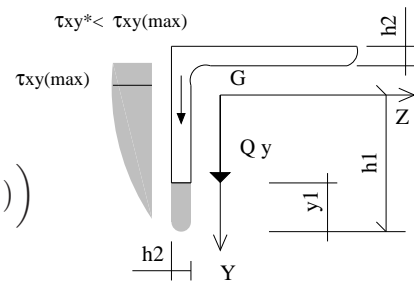


$$\begin{aligned}
 J_z &= J_y \\
 J_{zy} &< 0 \\
 J_1 &> J_2 \\
 J_1 + J_2 &= J_z + J_y \\
 J_1 &= J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - \frac{J_{zy} \sin(2\alpha)}{2} \\
 \text{Como } \alpha &= 45^\circ \\
 J_1 &= \frac{1}{2}(J_z + J_y - J_{zy}) \\
 J_1 &= \frac{1}{2}(J_1 + J_2 - J_{zy}) \Rightarrow \frac{-1}{2} J_{zy} = \frac{1}{2}(J_1 - J_2) \\
 -J_{zy} &= J_1 - J_2 \quad (\text{En este caso particular})
 \end{aligned}$$

Si se da $Q=Q_y$, J_y , J_z y J_{zy} , Calcular

$\tau_{xy}(Q_y)$ en y1

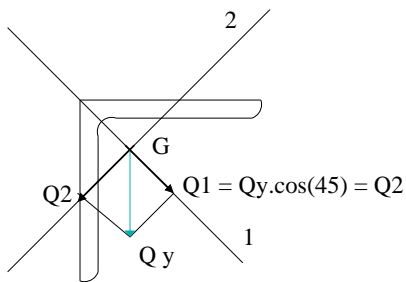
$$\tau_{xy} = \frac{Q_y}{t(J_y J_z - J_{zy}^2)} \left(J_{zy} t y_1 \left(h_2 - \frac{t}{2} \right) - J_y t y_1 \left(h_1 - \frac{y}{2} \right) \right)$$



fórmula general (muy engorrosa)

Otra forma: Clásica

$$Q_y = Q_1 + Q_2$$



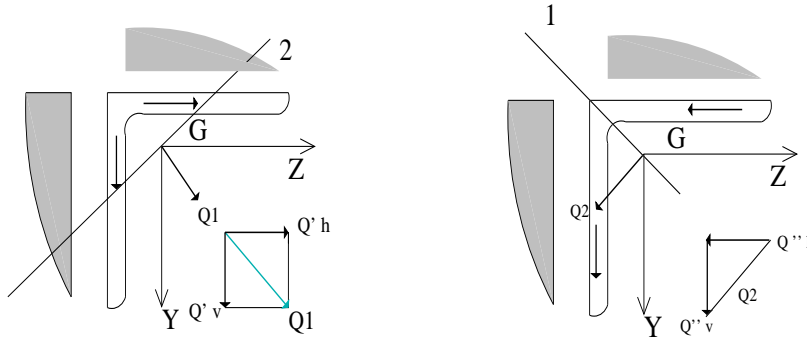
$$\tau_{xy}(Q_1) = \frac{Q_1 S_2^{F*}}{J_2 t} \Rightarrow Q'v = \int \tau_{xy}(Q_1) dF$$

$$\tau_{xy}(Q_2) = \frac{Q_2 S_1^{F*}}{J_1 t} \Rightarrow Q''v = \int \tau_{xy}(Q_2) dF$$

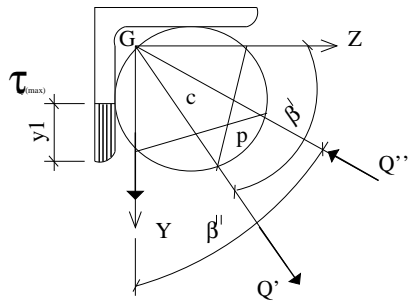
$$Q'v = Q_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{Q_y}{2}$$

$$Q''h = Q_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{Q_y}{2}$$

Los Q_h se anulan ($Q'_h + Q''_h$), los Q_v se suman $\Rightarrow Q_y = Q'_v + Q''_v$



Otra forma: Propuesta del **Ing. Héctor Claiman**, para este ejemplo simple conviene el método clásico



$$J_z = J_y$$

$$J_{zy} < 0$$

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{J_z}{J_{zy}}$$

$$\operatorname{tg} \beta'' = \frac{J_y}{J_{zy}}$$

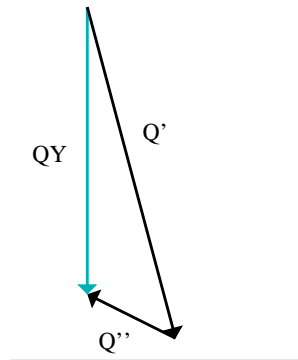
$$\beta' = \beta'' \text{ en este caso } J_z = J_y$$

Sólo para τ_{xy} por sencillez, pero válido para cualquier τ .

$$\tau_{xy} = \frac{Q'_y \sin \beta'}{t J_z} S^z + \frac{Q''_y \sin \beta''}{t J_y} S^y$$

$$Q'_y = Q'$$

$$Q''_y = Q''$$



$$1) Q_y = Q' \sin \beta' + Q'' \cos \beta'' = Q' \sin \beta' + Q'' \cos \beta'$$

$$2) 0 = Q' \cos \beta' + Q'' \sin \beta'' = Q' \cos \beta' + Q'' \sin \beta'$$

$$Q' = \frac{-Q'' \sin \beta'}{\cos \beta'}$$

$$Q = \frac{-Q'' \sin \beta'}{\cos \beta'} + Q'' \cos \beta' = Q'' \left(\cos \beta' - \frac{\sin^2 \beta'}{\cos \beta'} \right)$$

$$Q'' = \frac{Q_y}{\cos \beta' - \frac{\sin^2 \beta'}{\cos \beta'}}$$

$$Q' = \frac{-Q_y \sin \beta'}{\cos \beta' \left(\cos \beta' - \frac{\sin^2 \beta'}{\cos \beta'} \right)}$$

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y}{J_z \cdot t} \cdot \left[\frac{-\sin(\beta')^2}{\cos(\beta') \cdot \left(\cos(\beta') - \frac{\sin(\beta')^2}{\cos(\beta')} \right)} \right] \cdot Sz + \frac{Q_y}{J_y \cdot t} \cdot \left[\frac{\sin(\beta')}{\cos(\beta') - \frac{\sin(\beta')^2}{\cos(\beta')}} \right] \cdot Sy$$

El mismo ejemplo:

En forma numérica. Determinación de τ_{xy-max} para el perfil de la figura, Angulo 100-100-10

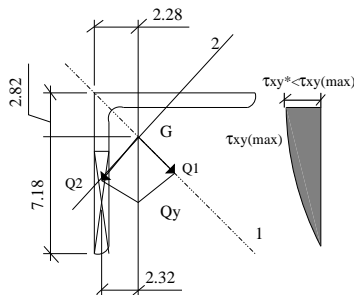
$$\begin{aligned} F &= 19.2 \text{ cm}^3 \\ J_y=J_z &= 177 \text{ cm}^4 & J_y+J_z &= 354 \text{ cm}^4 \\ J_1 &= 280 \text{ cm}^4 \\ J_2 &= 73.3 \text{ cm}^4 & J_1 + J_2 &= 353.3 \text{ cm}^4 \\ -J_{yz} &= (J_1 - J_2)/2 = 103.35 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Fórmula General, τ_{xy-max} :

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y}{1 \cdot (1,77^2 - 103,35^2)} \cdot \left[103,35 \cdot 1 \cdot 7,18 \cdot \left(2,82 - \frac{1}{2} \right) - 177 \cdot 1 \cdot 7,18 \cdot \left(7,18 - \frac{7,18}{2} \right) \right]$$

$$\tau_{xy} = 0,13758 \cdot Q_y$$

Por descomposición de Q_y en Q_1 y Q_2 , τ_{xy-max} :



$$Q_1 = Q_y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Q_2 = Q_y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tau_{xymax} = \frac{Q_1 \cdot S_2^{F\ominus}}{J_2 \cdot t} + \frac{Q_2 \cdot S_1^{F\ominus}}{J_1 \cdot t}$$

$$S_{2max} = 1 \cdot 7,18 \cdot (3,59 - 2,32) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 9,1186 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{cm}^3 \quad (5)$$

$$S_{1max} = 1 \cdot 7,18 \cdot (3,59 + 2,32) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 42,4338 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{cm}^3 \quad (6)$$

$$\tau_{xy}(Q_1) = Qy \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} * 9,1186}{1 * 73,3} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} * 42,4338}{1 * 280} \right)$$

$$\tau_{xy}(Q_1) = 0,13797 Qy \quad (\text{Por descomposición})$$

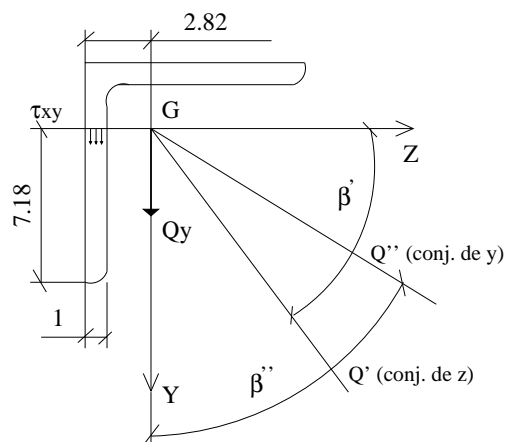
Por el método simplificado de suponer que trabaja el alma solamente, $\tau_{xy\text{media}}$:

$$\tau_{xy\text{max}} = \frac{Qy}{F_o} = \frac{Qy}{1,9} = 0,1111 \cdot Qy$$

$$\tau_{xy\text{max}} = 0,1111 \cdot Qy$$

Vemos que la aproximación da un error >20% con τ_{xy} en defecto.

Por descomposición según Q' y Q'' (Respectivos conjugados de z e y), $\tau_{xy\text{máx}}$:



$$tg(\beta'') = tg(\beta') = \frac{J_z}{J_{zy}} = \frac{177}{-103,35} = -1,712626$$

$$\beta'' = \beta' = 59,7194167 \text{ grados}$$

$$\sin(\beta') = 0,863566478$$

$$\cos(\beta') = 0,504235002$$

$$\frac{\sin(\beta')^2}{\cos(\beta')} = 1,478967265$$

$$Q'' = \frac{Q_y}{\left(\cos(\beta') - \frac{\sin(\beta')^2}{\cos(\beta')}\right)} = -1,025922748 \cdot Q_y$$

$$Q' = \frac{-Q_y \cdot \sin(\beta')}{\cos(\beta') \cdot \left(\cos(\beta') - \frac{\sin(\beta')^2}{\cos(\beta')}\right)} = 1,757022973 \cdot Q_y$$

$$Q = Q' + Q''$$

$$S_z = \frac{1 \cdot 7 \cdot 18^2}{2} = 25,7762 \cdot \text{cm}^3$$

$$S_y = 1 \cdot 7 \cdot 18 \cdot (2,82 - 0,5) = 16,6576 \cdot \text{cm}^3$$

$$\tau_{xy} = \left[\frac{25,7762 \cdot 1,757021973}{1,177} - \frac{[16,6576 \cdot (-1,025922748)]}{1,177} \right] \cdot 0,863566478$$

$$\tau_{xy} = 0,13758487 \cdot Q_y$$

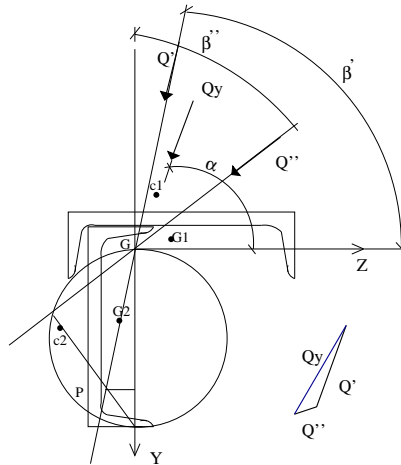
Resumen (la unidad de $\tau = [Q]/\text{cm}^2$)

	$\tau_{xy} \text{ máx}$	Observaciones
Exacta →	0.1376 Qy	Fórmula General de la Flexión y Corte oblicuo (Timoshenko)
	0.1380 Qy	Descomposición de la oblicuidad según dos direcciones principales
	0.1111 Qy	Aproximación según las reglas de la práctica más general
	0.1376 Qy	Según método de descomponer en dos direcciones, respectivamente conjugadas, de los ejes ortogonales sencillos no principales.

Cuadro 1: Propuesta del Ing. Héctor Claiman: útil para figuras complejas de pequeño espesor con ejes ortogonales sencillos, para determinar tensiones tangenciales y centros de corte.

Ejemplo:

Con el método propuesto para perfiles compuestos. (Genérico).



Coordenadas Oblicuas.

Q'' dirección conjugada de y

Q' dirección conjugada de z

$$tg\beta' = \frac{J_z}{J_{zy}}$$

$$tg\beta'' = \frac{J_y}{J_{zy}}$$

$$Q \cdot \sin(\alpha) = Q' \cdot \sin(\beta') + Q'' \cdot \cos(\beta'')$$

$$Q \cdot \cos(\alpha) = Q' \cdot \cos(\beta') + Q'' \cdot \sin(\beta'')$$

$$\tau_{xy}(Q') = \frac{Q' \cdot \sin(\beta') \cdot S_z}{t \cdot J_z}$$

Para la misma sección. (Los signos según el flujo.)

$$\tau_{xy}(Q'') = \frac{Q'' \cdot \sin(\beta'') \cdot S_y}{t \cdot J_y}$$

$$\tau_{xy}(Q) = \tau_{xy}(Q') + \tau_{xy}(Q'')$$

$$Q' \sin \beta' = Q'_1 \sin \beta' + Q'_2 \sin \beta'$$

$$Q' = Q'_1 + Q'_2$$

$$Q'_{1v} = Q'_1 = Q'_1 \sin \beta'$$

$$Q'_{2v} = Q'_2 = Q'_2 \sin \beta'$$

$$Q'_1 = Q' \frac{J^1_z}{J_{zt}}$$

$$Q'_2 = Q' \frac{J^2_z}{J_{zt}}$$

$$Q_1 = Q \frac{J^1_z}{J_{zt}} = Q'_{1v}$$

$$Q_2 = Q \frac{J^2_z}{J_{zt}} = Q'_{2v}$$

$$Q = Q_y = Q_1 + Q_2$$

(para el ejemplo)

No interesa la dirección ni el valor de Q para el centro de corte, si, como se reparte entre perfiles, es un concepto geométrico independiente de las solicitaciones. Depende de la distribución interna, relación entre las partes, de las tensiones tangenciales.

Ejemplo: Determinar la posición de Q_y (la abcisa según Z solamente) para que no haya torsiones en la sección compuesta.

Suponemos 2 UPN 200.

Aquí es muy fácil el cálculo de los momentos de inercia respecto de z e y.

$$F_1 = F_2 = 32,2 \text{ cm}^2$$

$$J_{zG2} = J_{yG1} = 1910 \text{ cm}^4$$

$$J_{zG1} = J_{yG2} = 148 \text{ cm}^4$$

Posición de G:

$$u = \frac{32,2 \cdot 2,01 + 32,2 \cdot 10,85}{64,4} = 6,43 \cdot \text{cm}$$

$$v = \frac{32,3 \cdot 10,0 + 32,2 \cdot (2,01 + 1,15)}{64,4} = 6,58 \cdot \text{cm}$$

$$J_{z1} = 148 + 32,2 \cdot (6,43 - 2,01)^2 = 777,07208 \cdot \text{cm}^4$$

$$J_{z2} = 1910 + 32,2 \cdot (10,85 - 6,43)^2 = 2539,07208 \cdot \text{cm}^4$$

$$J_{zT} = J_{z1} + J_{z2} = 2359,14416 \cdot \text{cm}^4$$

Posición de e_2 :

$$t_f = 1,15cm$$

$$t_w = 0,85cm$$

$$b = 7,5 - 0,5 * 0,85 = 7,075cm$$

$$h = 20 - 1,15 = 18,85cm$$

$$\tau_{xmax} = \frac{Q_1 \cdot (7,5 - 0,5 \cdot 0,85) \cdot 1,15}{2 \cdot J_{z2} \cdot 1,15}$$

$$e_2 = \frac{3 \cdot b^2 \cdot t_f}{h \cdot t_w + 6 \cdot b \cdot t_f} = 2,66 \cdot cm$$

Otra forma(Timoshenko)

$$e_2 = \frac{b^2 \cdot h^2 \cdot t_f}{4 \cdot J_{z_{g2}}} = \frac{7,075^2 \cdot 18,85^2 \cdot 1,15}{4 \cdot 1910} = 2,68 \cdot cm$$

$$\chi_{ftotal} = \chi_1 = \chi_2 = cte \quad (\text{Bernoulli - Navier})$$

$$\chi_{1ftotal} = \frac{M \cdot \sin(\beta)}{J_{gg} \cdot E} \quad (\text{Flexión y Corte Oblicua})$$

$$J_{gg} = J_{gg1} + J_{gg2}$$

$$\chi_1 = \frac{M_1 \cdot \sin(\beta)}{J_{gg1} \cdot E} = \chi_2 = \frac{M_2 \cdot \sin(\beta)}{J_{gg2} \cdot E}$$

J_{gg} : Momento de inercia respecto de $g_1 - g_1$ (conjugados de LC_1) de la sección 1.

Luego como $M = M_1 + M_2$, $M_1 = (J_{gg1}/J_{ggT}) * M$ y $M_2 = (J_{gg2}/J_{ggT}) * M$, distribución de M según rigideces a flexión de los perfiles.

Posición de s: (por donde debe pasar Q_y respecto de G). Ver Timoshenko 9.5 - pág 521.

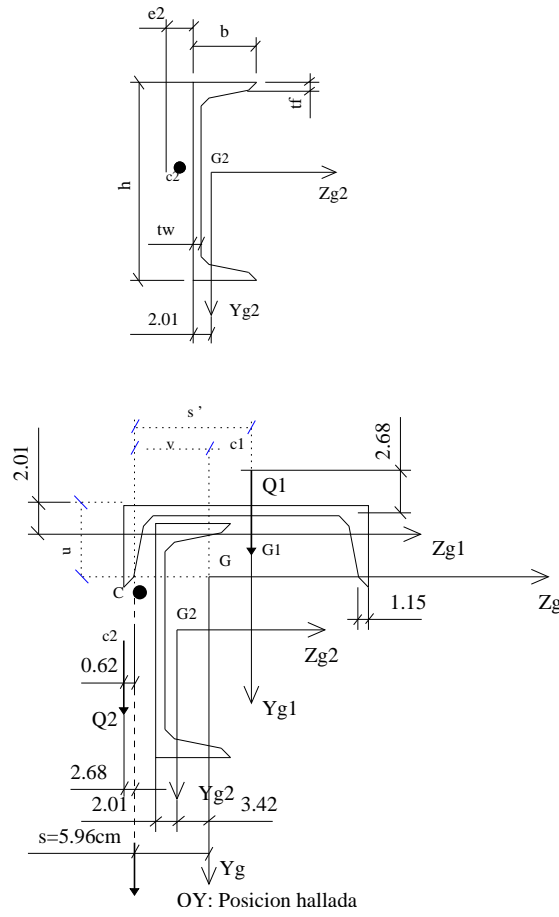
Como $Q = \frac{dM}{dx}$ surge:

$$Q_1 = \frac{J_{z1}}{J_{zT}} \cdot Q = 0,2343 \cdot Q$$

$$Q_2 = \frac{J_{z2}}{J_{zT}} \cdot Q = 0,7657 \cdot Q$$

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$Q \cdot s' = Q_1 \cdot (10 - 1,15 + 2,255)$$



$s' = 9,378 \text{ cm}$, desde G_1 , o sea, $s = 5,96 \text{ cm}$ desde G . Similarmente respecto de "y" nos daría la otra coordenada del centro de corte del perfil compuesto.