Acerca de la Definición de Caos Según Devaney

Ramiro Lafuente

Universidad Mayor de San Andrés
e-mail: ramiro_lafuente@yahoo.com

1. Introducción

En 1989, R.L. Devaney publicó su libro "A Introduction to Chaotic Dynamical Systems" que es una introducción muy amable a la teoría de Sistemas Dinámicos Caóticos [1] cuya atención fue significativa en los años siguientes. En este libro, Devaney define a una función caótica como una función continua $f : X \longrightarrow X$ (X esp. métrico) tal que:

1. f es transitiva
2. El conjunto de puntos periódicos de f es denso en X
3. f tiene dependencia sensitiva sobre las condiciones iniciales.

Aparentemente estas tres condiciones son "independientes", sin embargo sucede que (1) y (2) implica (3). J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis y P. Stacey fueron los que primero hicieron esta observación. En el presente artículo presentamos una demostración de nuestra autoría.

2. El Caos según Devaney

Definición 1. *Sea X un espacio métrico (X infinito) y sea $f : X \longrightarrow X$ una función.*

- *Se dice que f es* transitiva *si para todo par de abiertos no vacíos U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(k)}(U) \bigcap V \neq \phi$*
- *Se dice que $x \in X$ es un* punto periódico *de f si $f^{(k)}(x) = x$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$.*
- *Se dice que f tiene* dependencia sensitiva *sobre las condiciones iniciales si existe $\delta > 0$ (llamada* constante sensitiva*) tal que para todo $x \in X$ y para toda vecindad N de x, existen $y \in N$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$$

Definición 2. *Sea X un esp. métrico infinito. Una función continua $f : X \longrightarrow X$ es caótica sobre X si*

1. *f es transitiva,*
2. *El conjunto de puntos periódicos de f es denso en X, y*
3. *f tiene dependencia sensitiva sobre las condiciones iniciales.*

3. Teorema de simplificación

Teorema 1. *(1) y (2) implica (3)*

Demostración. Supongamos que f es transitiva y que los puntos periódicos de f forman un conjunto denso en X.

Escojamos dos puntos periódicos arbitrarios q_1 y q_2 con órbitas distintas $O(q_1)$ y $O(q_2)$.

Sea $\delta_0 \equiv d(O(q_1), O(q_2)) > 0$.

Entonces $\forall x \in X,\ \ d(x, O(q_i)) \geq \delta_0/2$ para algún $i = 1, 2$. Es cierto, pues:

$$\delta_0 \leq d(\overline{q}_1, \overline{q}_2) \leq d(x, \overline{q}_1) + d(x, \overline{q}_2) \leq d(x, \overline{q}_i) + d(x, \overline{q}_i) = 2d(x, \overline{q}_i) \quad \forall \overline{q}_i \in O(\overline{q}_i)$$

Entonces $\forall x \in X,\ \ d(x, O(q_i)) \geq \frac{\delta_0}{2}$ para algún $i = 1, 2$.

Por lo tanto, tenemos el siguiente:

Lema 1. *Existe un número $\delta_0 > 0$ tal que para todo $x \in X$, existe un punto periódico $q \in X$ tal que $d(x, O(q)) > \delta_o/2$.*

Probaremos que f tiene tendencia sensitiva sobre condiciones iniciales con constante sensitiva $\delta \equiv \delta_0/8$.

Sea x un punto arbitrario de X y sea N una vecindad cualquiera de x.

Como el conjunto de puntos periódicos de f es denso en X, existe un punto periódico $p \in N \bigcap B_\delta(x) =: U$.

Supongamos $f^n(p) = p$ (n es el período de p). Como ya probamos antes, existe un punto periódico q tal que $d(x, O(q)) \geq 4\delta$. Consideremos $f^{-i}(B_\delta(f^i(q))),\ \ i = 0, 1, ..., n$. y fijemos $V = \bigcap_{i=0}^{n} f^{-i}(B_\delta(f^i(q)))$. Claramente V es abierto y $V \neq \phi$ (pues $q \in V$).

Como f es transitiva, $\exists y \in U$ y $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(k)}(y) \in V$.

Sea $j = \left[\frac{k}{n} + 1\right]$. Así, $1 \leq nj - k \leq n$. Entonces

$$f^{nj}(y) = f^{nj-k}(f^k(y)) \in f^{nj-k}(V) \subseteq B_\delta(f^{nj-k}(q)).$$

Ahora bien, $f^{nj}(p) = p$ y, por la desigualdad triangular,

$$d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) = d(p, f^{nj}(y)) \geq d(x, f^{nj}(q)) - d(f^{nj-k}(q), f^{nj}(y)) - d(p, x)$$

Entonces, como $p \in B_\delta(x)$ y $f^{nj}(y) \in B_\delta(f^{nj-k}(q))$, tenemos que $d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) > 4\delta - \delta - \delta = 2\delta$.

Nuevamente, por la desigualdad triangular, tenemos que

$$d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) > \delta \quad \text{ó} \quad d(f^{nj}(x), f^{nj}(p)) > \delta.$$

En cualquiera de estos casos, tenemos encontrado un punto $z \in N \quad (z = p \text{ ó } y)$ tal que $d(f^{nj}(x), f^{nj}(z)) > \delta$, con la cual hemos probado que f tiene dependencia sensitiva sobre las condiciones iniciales con constante sensitiva δ. $\diamondsuit$

Referencias

[1] R.L. Devaney. *an Introduction to Chaotic Dynamical Systems.* Addison-Wesley, 1989.

[2] I. Stewart. *Does god play dice, Mathematias of Chaos.* Blackwell, 1989.