Sistemas Dinámicos Discretos y Caos

Alvaro Carrasco C.

Carrera de Matemáticas
Universidad Mayor de San Simón

Resumen

En este trabajo presentamos una breve panorámica sobre el fenómeno Caótico ligado a Sistemas Dinámicos Discretos. Caos, no significa aquí lo mismo que desorden, como en el lenguaje cotidiano, sino orden, pero orden oculto. Así cuando decimos que un sistema presenta el fenómeno del Caos determinista o simplemente Caos, nos referimos a que su evolución, a pesar de estar totalmente determinada por las variables que lo describen, no puede predecirse. Se tratará la definición de Caos debida a Devaney [5] y algunos resultados en torno a la misma.

1. Ejemplos de Sistemas Dinámicos Discretos

¿Que es un sistema dinámico discreto?

Damos dos ejemplos para responder esta pregunta

Ejemplo 1 *Si tomamos una calculadora científica y usamos la función "*cos*" repetidamente a partir de un valor numérico inicial* $x_{0,}$ *tenemos la sucesión:*

$$x_{0,} \cos(x_0), \cos(\cos(x_0)), \cos(\cos(\cos(x_0))), \cos(\cos(\cos(\cos(x_0)))), \ldots$$

sucesión que en este caso converge el valor 0.739085 *para cualquier valor inicial de* x_0*, este proceso iterativo es un ejemplo de sistema dinámico discreto.*

Ejemplo 2 *Otro ejemplo de sistema dinámico aparece cuando usamos el método de Newton para aproximar raíces de una ecuación* $f(x) = 0$*, consideremos la recurrencia, donde* x_0 *un número real*

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \end{aligned}$$

sabemos que para algunos x_0 la sucesión de valores $x_0, x_1, x_2, \ldots,$ converge a una de las raíces de f (si las tiene).

Tenemos algunas definiciones en torno a los Sistemas Dinámicos Discretos.

Definición 1 *La orbita hacia adelante de x es el conjunto de puntos:*

$$x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots$$

donde $f^n = f \circ f^{n-1}$. Si f es un homeomorfismo[1] *podemos definir las orbitas completas de x, como el conjunto de los puntos $f^n(x)$ para $n \in \mathbb{Z}$. El punto x es un punto fijo para f si $f(x) = x$. El punto x es un punto de periódico n si $\exists\ n \in \mathbb{Z}$ tal que $f^n(x) = x$. El número más pequeño n para el cual $f^n(x) = x$ es llamado el periodo de x. Denotaremos el conjunto de los puntos periódicos de periodo n por $Per_n(f)$. El conjunto de todas las iteraciones de un punto periódico forma una orbita periódica.*

La dinámica de la sucesión $\{f^n(x)\}$, para un valor inicial $x = x_0$, se obtiene como sigue: $x_1 = f(x_0)$ se obtiene como el punto de corte P_0 de la gráfica de la función $y = f(x)$ con la recta $x = x_0$. Este valor coincide con la abscisa del punto de corte Q_0 de la recta paralela al eje x que pasa por P_0 y la recta $y = x$. Si por $Q_0(x_1, x_1)$ trazamos la recta vertical $x = x_1$ y obtenemos el punto de corte P_1 con la curva dada, resulta que $P_1 = (x_1, f(x_1)) = (x_1, x_2)$. Repitiendo el proceso observamos que los valores x_i pueden ser obtenidos como las ordenadas de los sucesivos puntos P_i o como las abscisas de los puntos Q_i (ver Figura 1).

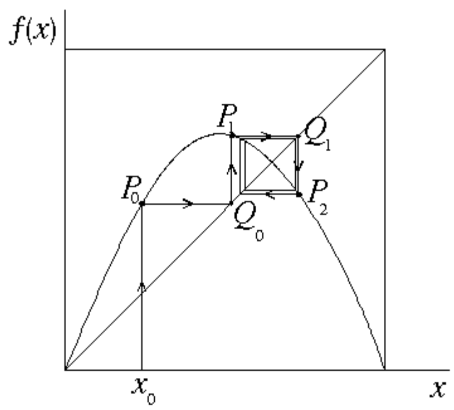

Figura 1.

Como lo importante en un sistema dinámico es estudiar sus orbitas, al respecto e intuitivamente podemos decir que las orbitas convergen o divergen. Sin embargo hay algo más: existen algunas funciones para las cuales no se tiene ni convergencia ni divergencia es decir se tiene un comportamiento caótico, para definirlo tenemos las siguientes definiciones

[1] Una función es un homeomorfismo si es continua y tiene inversa continua.

"carrasco"
2003/9/22
page 3

2. Conjugación Topológica

Definición 2 *Sea $f : A \to A$ y $g : B \to B$ dos funciones, f y g se dicen topológicamente conjugadas si existe un homeomorfismo$h : A \to B$ tal que:*

$$h \circ f = g \circ h$$

El homeomorfismo h es llamado una *conjugación topológica.*

La definición anterior se traduce diciendo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A \arrow[d, "h"] \\
B \arrow[r, "g"] & B
\end{tikzcd}$$

Las funciones que sean topológicamente conjugadas son completamente equivalentes en terminos de su dinámica. Por ejemplo, si f tiene por punto fijo p entonces $h(p)$ es punto fijo de g, también h da una correspondencia uno-uno entre los puntos periódicos de periodo n de f denotado por $Per_n(f)$ y $Per_n(g)$.

Ejemplo 3 *Sean las siguientes funciones:*

$$\begin{array}{ll} f(x) = -2\,|x| + 1 & x \in (-1,1) \\ g(x) = -2x^2 + 1 & x \in (-1,1) \end{array}$$

Dichas funciones son topológicamente conjugadas, por medio de la función:

$$\begin{array}{rcl} h & : & (-1,1) \to (-1,1) \\ h(x) & = & \dfrac{2}{\pi}\arcsin(x) \end{array}$$

En efecto:

$$\begin{tikzcd}
(-1,1) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & (-1,1) \arrow[d, "h"] \\
(-1,1) \arrow[r, "f"] & (-1,1)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rcl} h \circ g(x) & = & h(g(x)) = \dfrac{2}{\pi}\arcsin(-2x^2+1) \\ f \circ h(x) & = & f(h(x)) = -2\left|\dfrac{2}{\pi}\arcsin(x)\right| + 1 \end{array}$$

derivando ambas relaciones se tiene:

$$\frac{d}{dx}\left(h \circ g\right)(x) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\left(-2x^2+1\right)^2}}\left(-4x\right) = \frac{-4x}{\pi\,|x|\,\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(f\circ h\right)(x)=\frac{-4}{\pi\sqrt{1-x^2}}\frac{\arcsin x}{|\arcsin x|}$$

y como el $\arcsin x$ *y* x *tienen el mismo signo en* $(-1,1)$ *se sigue que* $\frac{d}{dx}\left(h\circ g\right)(x)=\frac{d}{dx}\left(f\circ h\right)(x)$*, finalmente como* $\left(h\circ g\right)(0)=\frac{2}{\pi}\arcsin(1)=1$ *y* $\left(f\circ h\right)(0)=-2\left|\frac{2}{\pi}\arcsin(0)\right|+1=1$ *se prueba que* $h\circ g=f\circ h$*. En consecuencia estas funciones tienen la misma dinámica.*

Teorema 1 *Supongamos que f y g son topológicamente conjugadas mediante la función h, entonces:*
(i) $h\circ f^n=g^n\circ h$*.*
(ii) Si x es un punto periódico de periodo n de f, entonces $h(x)$ es un punto de periodo n de g.
(iii) Si f tiene un conjunto denso de puntos periódicos, entonces también lo tiene g.

Prueba:

(i) Usamos inducción sobre n. Como f y g son topológicamente conjugadas mediante la función h, se tiene $h\circ f=g\circ h$. Supongamos que:

$$h\circ f^{n-1}=g^{n-1}\circ h$$

Entonces:

$$\begin{aligned} h\circ f^n &= (h\circ f)\circ f^{n-1}=(g\circ h)\circ f^{n-1}= \\ &= g\circ(h\circ f^{n-1})=g\circ(g^{n-1}\circ h)= \\ &= g^n\circ h \end{aligned}$$

(ii) Supongamos que x es un punto de periodo n de f, luego $f^n(x)=x$, usando el anterior resultado se obtiene:

$$\begin{aligned} g^n(h(x)) &= (g^n\circ h)(x)=(h\circ f^n)(x)= \\ &= h(f^n(x))=h(x) \end{aligned}$$

(iii) Se sigue del hecho que h es un homeomorfismo.
Esto completa la prueba. ■

3. Breve historia del Caos

"Si conociéramos con exactitud las leyes de la naturaleza y la situación del Universo en el momento inicial, podríamos predecir exactamente la situación de ese mismo Universo en un momento posterior. Pero aún si fuera el caso que las leyes de la naturaleza no escondieran ya ningún secreto para nosotros, sólo podríamos conocer la situación aproximadamente. Si eso nos hiciera capaces de predecir la situación posterior con la misma aproximación, eso es todo lo que requerimos, diríamos que el fenómeno ha sido

"carrasco"
2003/9/22
page 5

> *predicho, que es gobernado por las leyes. Pero esto no siempre es posible así; puede suceder que pequeñas diferencias en la condiciones iniciales provoquen diferencias muy grandes en el fenómeno final. Un pequeño error en las primeras, produciría un enorme error en el segundo*".

Este texto fue escrito a principios del siglo pasado por el gran físico y matemático Jules Henri Poincaré quien es el verdadero descubridor del fenómeno ahora llamado Caos. Poincaré ganó el premio que ofreció en 1887 el rey Oscar II de Suecia a quien pudiera determinar si el Sistema Solar es estable. Para contestar esa pregunta había que resolver primero el problema de los tres cuerpos. Poincaré publicó un trabajo en el que concluye no sólo que el problema de los tres cuerpos no tiene, en general, una solución mediante las ecuaciones de la mecánica clásica, sino también que un sistema de tres cuerpos es extremadamente dependiente de sus condiciones iniciales. Finalmente el rey decidió darle el premio ofrecido, por su contribución a la dinámica de los sistemas complejos.

Pero todos los hallazgos de Poincaré relacionados con el Caos fuerón un poco olvidados. Tuvierón que llegar las computadoras para que los investigadores redescubrierán lo que él ya habia entrevisto casi un siglo antes.

3.1. Efecto Mariposa

El primer experimentador del caos fue el meteorólogo Edward Lorenz. En 1960 estaba trabajando en el problema de predecir el tiempo. Tenía una computadora que calculaba el tiempo con 12 ecuaciones. La máquina no predijo el tiempo, pero en principio predijo como sería el tiempo probablemente.

Un día, en 1961, Lorenz quiso ver unos datos nuevos. Introdujo los números de nuevo a la computadora, pero para ahorrar el papel y el tiempo, solo calculó con 3 números decimales en vez de 6. Le salieron resultados totalmente diferentes. Lorenz intentó encontrar la explicación de eso y así surgió la teoría del caos. Al efecto que tienen las diferencias pequeñas e iniciales se le dió el nombre 'efecto mariposa' [8].

> "*El movimiento de una simple ala de mariposa hoy produce un diminuto cambio en el estado de la atmósfera. Después de un cierto período de tiempo, el comportamiento de la atmósfera diverge del que debería haber tenido. Así que, en un período de un mes, un tornado que habría devastado la costa de Indonesia no se forma. O quizás, uno que no se iba a formar, se forma*".

4. Definición de Caos, según Devaney

Definición 3 *La función $f : J \to J$ se dice topológicamente transitiva si para cada par de conjuntos abiertos $U, V \subset J$ existe $k > 0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Esta definición intuitivamente dice que una función topológicamente transitiva tiene puntos que eventualmente se mueven bajo iteración de una vecindad a otra. Luego el sistema dinámico no puede ser descompuesto en dos conjuntos abiertos los cuales sean invariantes bajo la función.

Definición 4 *La función $f : J \to J$ es sensible a las condiciones iniciales si existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in J$ y toda vecindad N de x, existe $y \in N$ y $n \geq 0$ tal que:*

$$| f^n(x) - f^n(y) | > \delta$$

Intuitivamente una función es sensible a las condiciones iniciales si existen puntos arbitrariamente cercanos a x los cuales se separan de x en al menos δ bajo iteración de f.

Definición 5 *(Según Devaney)[5] Sea V un conjunto, $f : V \to V$ se dice caótica en V si:*
(i) f es topológicamente transitiva.
(ii) el conjunto de los puntos periódicos denotado por $Per(f)$ es denso en V.
(iii) f es sensible a las condiciones iniciales.

Nota 1 *Observese que en la definición anterior:*
(i) La primera condición implica que el sistema no puede ser separado o descompuesto en trozos que no interactuen entre si.
(ii) La segunda condición sin embargo, da una cierta regularidad por existir una gran cantidad de puntos periódicos.
(iii) La tercera condición refleja, la impredictibilidad del sistema.

4.1. La rueda hidráulica de Lorenz

Para tener una idea de cómo se verifica un típico comportamiento caótico tenemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4 *[8] Supongamos un par de ruedas unidas por ocho travesaños de los que cuelgan recipientes con orifícios en sus bases, (ver Figura 2). Si la rueda se coloca bajo una caída de agua se presentan dos casos:*

Primero: cuando la intensidad de la corriente es tal que el agua que cae en cada recipiente es tan escasa que alcanza a drenarse antes de poder ejercer un peso suficiente para vencer la inercia del sistema y la rueda no se mueve. Sin embargo aumentando la corriente el recipiente empezará a llenarse puesto que caerá en el recipiente más agua de la que escapa por sus orificios y el peso vencerá a la fricción por lo que la rueda comenzará a girar, note que los recipientes iran perdiendo el agua y subirán vacios, este comportamiento regular se mantiene dentro de ciertos límites; entonces existe un intervalo de intensidad de corriente de agua donde el sistema es completamente explicable.

Segundo: existe una corriente mínima y una máxima mas allá de la cual el comportamiento se vuelve caótico, en efecto si se aumenta la intensidad de la corriente del agua

la alta velocidad de la rueda impedirá que los recipientes tengan el tiempo suficiente para dos cosas: llenarse bajo el chorro de agua y vaciarse antes de llegar a la parte más baja de su recorrido. Esto hará que el peso de las cubetas que suben sin haberse vaciado redusca la velocidad de la rueda hasta detenerla y hacerla girar en sentido inverso, pero entonces las cubetas del lado opuesto volverán a tener tiempo para llenarse y harán que la rueda vuelva a girar en el primer sentido. Así la rueda girará en uno y otro sentido sin que sea posible predecir cuándo se producirá cada cambio de giro.
Este comportamiento irregular se debe a que una de las variables determinan a las otras, que a su vez determinan a las unas.

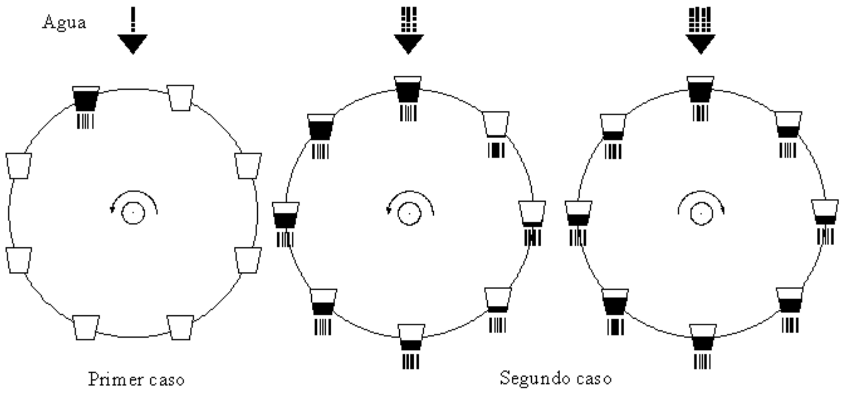

Figura 2.

4.2. La función logística

Un ejemplo preliminar a la función logística, donde S^1 denota el círculo unitario, es decir, $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$

Ejemplo 5 *Sea $f : S^1 \to S^1$ definida por $f(\theta) = 2\theta$, entonces f es caótica.*

Prueba:

En efecto: como se puede ver la distancia angular entre dos puntos se duplica en cada iteración, entonces f es sensible a las condiciones iniciales.
Es topológicamente transitiva pues cualquier arco por pequeño que sea en S^1 es expandido por algún f^k a cubrir todo S^1 y en particular cualquier arco en S^1.
La densidad de los puntos periodicos se establece como sigue. Denotamos un punto en S^1 por su ángulo medido en radianes y de la forma usual. Entonces un punto esta determinado por cualquier ángulo de la forma $\theta + 2\pi k$ para

$k \in \mathbb{Z}$. Ahora como $f(\theta) = 2\theta$, es fácil ver $f^n(\theta) = 2^n\theta$, de manera que θ es periódico, de periodo n si y solo si:

$$2^n\theta = \theta + 2\pi k$$

para algún k es decir si y solo si $\theta = 2\pi k/(2^n - 1)$ donde $0 \leq k \leq 2^n$ y $k \in \mathbb{Z}$, entonces los puntos periódicos de periodo n para f son las $(2^n - 1)^{esimas}$ raíces de la unidad y se sigue que el conjunto de puntos periódicos es denso en S^1. ■

Se llama función logística a $F_n(x) = nx(x-1)$, veamos la dinámica de F_n con $n = 4$

Ejemplo 6 *$F_4(x) = 4x(1-x)$ es caótica en el intervalo $I = [0,1]$*

Prueba:

Sea $g(\theta) = 2\theta$ una función definida en S^1 como en el ejemplo anterior:

$$\begin{aligned} h_1 &: S^1 \to [-1,1] \\ h_1(\theta) &= \cos\theta \end{aligned}$$

Es decir, h_1 es exactamente la proyección de S^1 sobre el eje x.
Sea $q : [-1,1] \to [-1,1]$ definida por $q(x) = 2x^2 - 1$, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} h_1 \circ g(\theta) &= \cos(2\theta) = \\ &= 2\cos^2\theta - 1 \\ &= q \circ h_1(\theta) \end{aligned}$$

De manera que h_1 conjuga g con q. Ahora q es también topológicamente conjugada con F_4 por medio de la función:

$$\begin{aligned} h_2 &: [-1,1] \to [0,1] \\ h_2(t) &= \frac{1}{2}(1-t) \end{aligned}$$

entonces tenemos $F_4 \circ h_2 = h_2 \circ q$ luego se tiene el siguiente diagrama conmutativo :

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_1"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & S^1 \arrow[d, "h_1"] \\ {[-1,1]} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "h_2"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & {[-1,1]} \arrow[d, "h_2"] \\ {[0,1]} \arrow[r, "F_4"] & {[0,1]} \end{tikzcd}$$

Y se sigue inmediatamente que F_4 es topológicamente transitiva, pues si U y V son dos intervalos abiertos de I, podemos escojer arcos abiertos $\widehat{U}$ y $\widehat{V}$

en S^1 los cuales se proyectan sobre U y V bajo $h_2 \circ h_1$. Puesto que existe k tal que $g^k(\widehat{U}) \cap \widehat{V} \neq \emptyset$, entonces tenemos $F_4^k(\widehat{U}) \cap \widehat{V} \neq \emptyset$.

Para probar la sensibilidad a las condiciones iniciales, denotemos cualquier vecindad U de $x \in I$ proyectada a $\widehat{U}$ en S^1. Existe n tal que $g^n(\widehat{U})$ cubre S^1, de manera de $F_4^n(U)$ cubre I. Entonces hay puntos en U los cuales se mueven en al menos $\delta = 1/2$ de x.

Finalmente, la densidad de los puntos periódicos de g implica que hay un punto g-periódico en $\widehat{U}$. La proyección de este punto en U es claramente F_4- periódico.■

En la Figura 3, observamos 500 iteraciones de un punto arbitrario para la función logística con $n = 4$, en la cual podemos apreciar su dinámica caótica en $I = [0, 1]$.

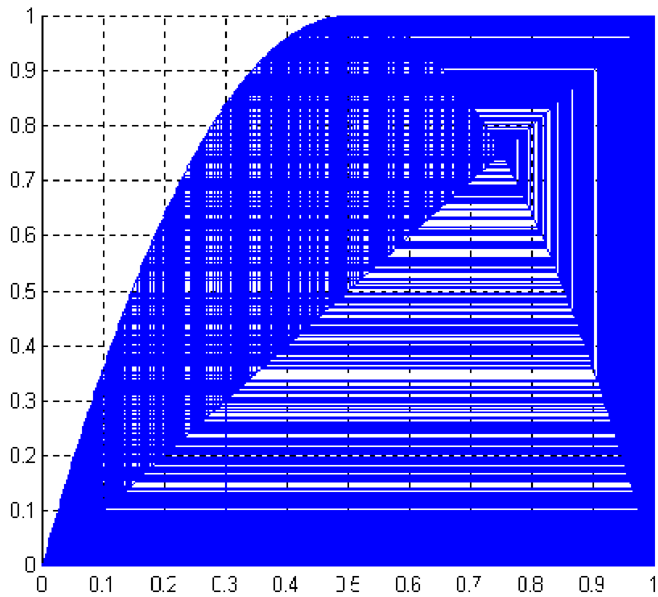

Figura 3.

En lo que sigue las pruebas de los resultados que damos se omiten, sin embargo se las puede encontrar en las referencias.

5. El Teorema de Sarkovskii

Una primera caracterización de una función caótica es debida a Li - York y generalizada por Sarkovskii.

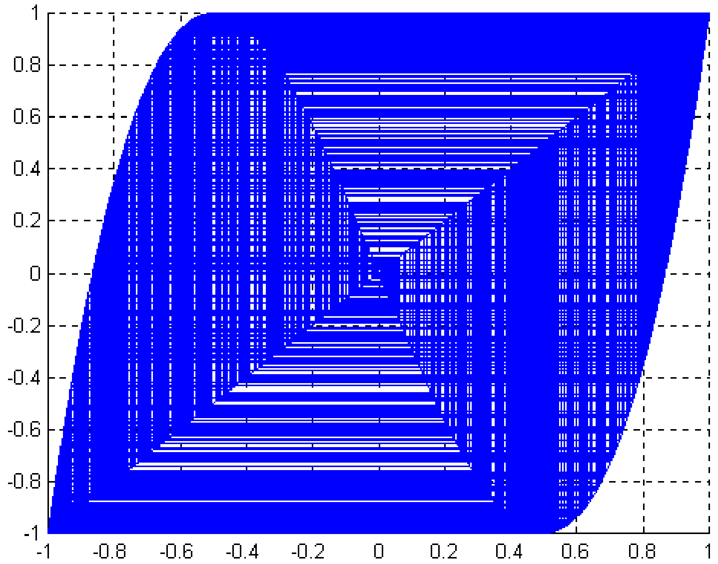

Figura 4.

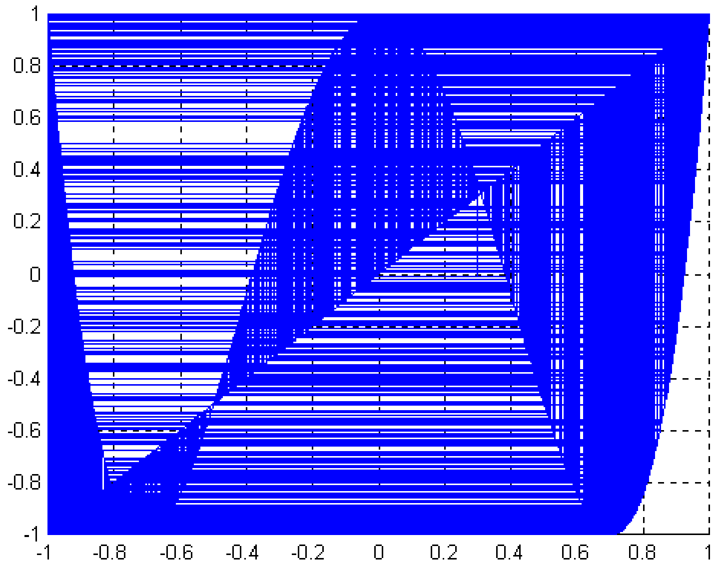

Figura 5.

Teorema 2 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Supongamos que f tenga un punto periódico de* *periodo tres. Entonces f tiene puntos periódicos de todos los órdenes.*

Definición 6 *Consideremos el siguiente orden de los números naturales:*

$$\begin{array}{l} 3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd \cdots \rhd 2 \cdot 3 \rhd 2 \cdot 5 \rhd \cdots \rhd 2^2 \cdot 3 \rhd 2^2 \cdot 5 \rhd \cdots \\ \cdots \rhd 2^3 \cdot 3 \rhd 2^3 \cdot 5 \rhd \cdots \rhd 2^3 \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1. \end{array}$$

Es decir la primera fila lista todos los números impares excepto el uno, le sigue 2 *veces los impares,* 2^2 *veces los impares, etc. Esto agota con todos los números naturales con excepción de las potencias de* 2 *que se las lista al final. Este es el ordenamiento de los números naturales de Sarkovskii.*

Teorema 3 (Teorema de Sarkovskii) Supongamos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Suponga que f tiene un punto periódico de periodo primo k. Si $k \rhd \ell$ en el orden anterior, entonces f también tiene un punto periódico de periodo ℓ.

6. Sobre la definición de Caos

Proposición 1 *(Banks, Brooks, Cairns, Davis y Stacey, 1992)[3]Sea X un espacio métrico perfecto[2] y $f : X \to X$ una función contínua. Si f es topológicamente transitiva y tiene puntos periódicos densos entonces f es sensible a las condiciones iniciales.*

Ejemplo 7 $F(x) = 4x^3 - 3x$ *es caótica en* $[-1, 1]$.

Prueba:

Consideremos $g(\theta) = 3\theta$ una función definida en S^1:

$$\begin{array}{rcl} h_1 & : & S^1 \to [-1,1] \\ h_1(\theta) & = & \cos\theta \end{array}$$

entonces tenemos:

$$\begin{array}{rcl} h_1 \circ g(\theta) & = & \cos(3\theta) = \\ & = & 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \\ & = & F \circ h_1(\theta) \end{array}$$

Luego se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{g} & S^1 \\ \Big\downarrow h_1 & \circlearrowleft & \Big\downarrow h_1 \\ [-1,1] & \xrightarrow{F} & [-1,1] \end{array}$$

[2] S subconjunto de un espacio métrico (X, d) es perfecto si es igual al conjunto de sus puntos límites.

y entonces F es topológicamente conjugada con g y se sigue como en el ejemplo 4 que F es topológicamente transitiva, pues si U y V son dos intervalos abiertos de $[-1,1]$, podemos escojer arcos abiertos $\widehat{U}$ y $\widehat{V}$ en S^1 los cuales se proyectan sobre U y V bajo h_1. Puesto que existe k tal que $g^k(\widehat{U}) \cap \widehat{V} \neq \emptyset$, entonces tenemos $F^k(\widehat{U}) \cap \widehat{V} \neq \emptyset$.

La densidad de los puntos periódicos de g implica que hay un punto g-periódico en $\widehat{U}$. La proyección de este punto en U es claramente $F-$ periódico. Por la proposición anterior se sigue que F es sensible a las condiciones iniciales y luego es caótica, ver Figura 4.■

Remarca 1 *Es importante observar que aunque Banks y los otros muestran en la proposición anterior que las condiciones (i) y (ii) implican (iii) no dicen nada respecto a las otras dos posibles implicaciones, sin embargo estas no se verifican, Asasf y Gadbois[1] tienen contraejemplos para las mismas.*

- (i) y (iii) no implican (ii)
  Sea $X = S^1 - \left\{e^{i2\pi p/q} : p, q \in \mathbb{Q}\right\}$ es decir X esta formado por los puntos de la circunferencia unitaria en las cuales se han quitado las raices $n - esimas$ de la unidad, el valor de la métrica entre dos puntos es la longitud del menor arco que definen dichos puntos, consideremos la función $f : X \to X$ definida por $f\left(e^{i\theta}\right) = e^{i2\theta}$, entonces f no tiene puntos periódicos pues por construcción se han quitado dichos puntos de X y dichos puntos son los candidatos a ser puntos periódicos como se mostro en el ejemplo 3, pero f es aún topológicamente transitiva ya que cualquier arco es expandido hasta cubrir todo X y así en particular cualquier otro arco, por otro lado f es sensible a las condiciones iniciales ya que dados dos puntos en X, $e^{i\theta}$, $e^{i\phi}$ tales que $0 < |\theta - \phi| < \pi$, escogemos un n tal que
  $$2^n |\theta - \phi| \leq \pi \leq 2^{n+1} |\theta - \phi|$$
  entonces $d\left(f^n\left(e^{i\theta}\right), f^n\left(e^{i\phi}\right)\right) > \pi/2$.
- (ii) y (iii) no implican (i)
  Sea $Y = S^1 \times [0,1]$, es decir un cilindro, la métrica d es la inducida por el producto cartesiano, consideremos la función $g : Y \to Y$ definida por $g\left(e^{i\theta}, y\right) = \left(e^{i2\theta}, y\right)$ entonces g no es topológicamente transitiva ya que si tomamos $U = S^1 \times [0, 1/2)$ y $V = S^1 \times (1/2, 1]$ es fácil observar que $g^n(U) = U$ y como $U \cap V = \varnothing$, entonces $g^n(U) \cap V = \varnothing$. Sin embargo g tiene puntos periódicos densos en Y, esto es así ya que es suficiente observar que los tenga en la primera componente lo cual ya se ha establecido, de la misma manera g es sensible a la condiciones iniciales.

Proposición 2 *Sea I un intervalo no necesariamente finito y sea $f : I \to I$ continua y topológicamente transitiva, entonces los puntos periódicos de f son densos en I y f es sensible a las condiciones iniciales.*

Ejemplo 8 *Pruebe que $F(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ es caótica en $[-1,1]$.*

"carrasco"
2003/9/22
page 13

En efecto: la función F es topológicamente conjugada con $g(x) = 4x$ vía $h(x) = \cos(x)$, luego F es topológicamente transitiva ya que g lo es, entonces por la anterior proposición se sigue que F es caótica, el gráfico de la dinámica de está función esta en la Figura 5.

Ejemplo 9 *Estudiemos la dinámica del método de Newton a la ecuación* $x^2 + 1 = 0$

El método de Newton da la siguiente relación de recurrencia para aproximar las raíces de la ecuación anterior:

$$F(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$$

como la ecuación no tiene raíces en el conjunto de los números reales, nos preguntamos sobre la dinámica de la relación de Newton. La respuesta es: la dinámica es caótica en todo $\mathbb{R}$. Es claro que no podía haber sido otra, en la Figura 6 se muestra la dinámica de la misma.

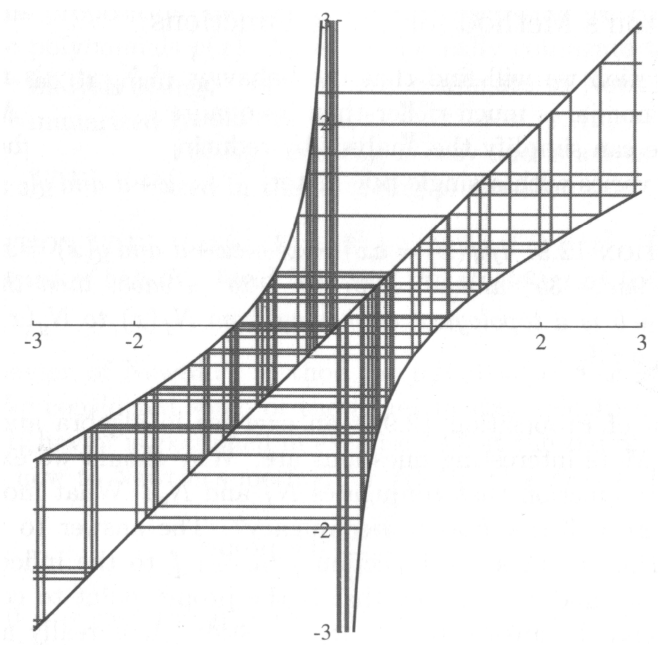

Figura 6.

Formalmente establecemos este resultado como sigue: es fácil probar que F es topológicamente conjugada con $g(x) = 2x$, vía $h(x) = \cot\left(\frac{x}{2}\right)$, donde $h : S^1 - \{0\} \to \mathbb{R}$, entonces como g es topológicamente transitiva, F lo es y por una segunda aplicación de la proposición anterior concluimos la justificación sobre el comportamiento caótico de F en todo $\mathbb{R}$.

7. Tendencias

Hasta ahora parecía que al estallar el caos, no somos capaces de hacer nada, el avión empieza a moverse raro y la catástrofe es inevitable. El corazón empieza a pulsar rápidamente y sin ayuda inmediata, ocurre lo peor ...

Las investigaciones nuevas muestran que sí hay esperanzas de "domesticar" el caos[10]. Edward Ott, Ceslo Grebogi (físicos) y James A. Yorke (matemático) elaborarón un algoritmo matemático con el que un caos puede ser transformado en procesos sencillos. Por ejemplo en el experimento de A. Garfinkel de la Universidad de California se logró transformar el movimiento caótico de un corazón sacado de un conejo en un movimiento regular. Obviamente el uso de eso en medicina significaría un avanze enorme.

La idea es que no hace falta comprenderlo todo sobre el movimiento caótico para regularlo. El algoritmo Ott-Grebory-Yorke mira contínuamente que "dirección" tiene el proceso, y con perturbaciones pequeñas se logra que esté de nuevo en el "camino" antes deseado. Naturalmente aquí no termina la vigilia del sistema, porque despues el caos aparecerá de nuevo. Yorke dice que el método es como *ayudar a andar a un elefente con un palito.*

8. Conclusiones

Un fenómeno caótico se caracteriza por la impredictibilidad del mismo, una dinámica incapaz de ser descompuesta en partes que no interactúen entre si y finalmente una cierta regularidad por existir una gran cantidad de puntos periódicos, esta cantidad de puntos periódicos nos muestra una faceta imprevista, pues caos no significa aquí lo mismo que desorden, como en el lenguaje cotidiano, sino orden, pero orden oculto. Hay muchas ideas falsas sobre el caos, divulgadas por películas como Parque Jurásico por ejemplo, según las cuales la teoría del caos se trate del desorden. Nada podría estar más lejos de la verdad. Es cierto que la teoría dice que pequeños cambios pueden causar cambios enormes, pero no dice que no hay orden absolutamente. Una de las ideas más importantes es que mientras es casi imposible predecir exactamente el estado futuro de un sistema, es posible, y aún más, muchas veces fácil modelar el comportamiento general del sistema. Eso es lo que muestran los atractores. O sea, el caos no es desorden, más que nada en ciento sentido podemos decir que es determinista.

Referencias

[1] David Assaf, IV y Steve Gadbois: *Definition of chaos*, letter in American Mathematical Monthy, november 1992

[2] http://sites.netscape.net/alvarocardenas/caos/caos0.html

[3] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis y P. Stacey: *On Devaneys Definicion of Chaos.* (pp. 332-334). The American Mathematical Monthy, number 4/april 1992.

[4] Michael F. Barnsley: *Fractals Everywhere*. Academic Press Inc, 2nd ed, 1993.

[5] Robert L. Devaney: *An introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley, 2nd ed, 1989.

[6] `http://www.geocities.com/capecanaveral/Lab/8609/hist.htm`

[7] `http://www.geocities.com/capecanaveral/Lab/8609/tend.htm`

[8] Edgar Gómez Marin: *Esto es el caos*. Colección Viaje al Centro de la Ciencia. ADN Editores, S.A., 1995.

[9] Richard A. Holmgren: A first course in discrete dynamical systems. Springer - Verlag 1994.

[10] T. Kapitaniak.:*Chaos for Engineers*. Springer-Verlag, 2nd ed, 2000.

[11] T. Y. Li y J.A. York: *Period three implies chaos*. (pp. 985-992) The American Mathematical Monthy, number 1975.

[12] Juan L. Romero R.: *Introducción al caos*. Epsilon, Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", 1^{er} cuatrimestre 1994.

[13] Michel Vellekoop y Raoul Berglud: *On intervals, Transitivity = Chaos*. (pp. 353-355)American Mathematical Monthy, april 1994.