

## La formación matemática en secundaria: sin euforias ni tormentos\*

Oscar Pino Ortiz

Centro de Investigación Matemática - CIMa  
Universidad Católica Boliviana San Pablo  
Cochabamba - Bolivia  
e-mail: pino@ucbcba.edu.bo

Una vez leídas las memorias del 1er Seminario Nacional de Educación Secundaria\*\*, hemos pragmáticamente concluido de que es tan inútil como difícil pretender añadir consistencia o profundidad a los propósitos, análisis y consideraciones presentadas en los textos que las componen. Felizmente ese no es nuestro objetivo, sino uno más humilde, más cotidiano y muchísimo menos exitoso. En claro, nuestro trabajo no es el del arquitecto educativo que imagina el imponente edificio intelectual con que debe dotarse al educando, sino el del albañil educador que se ocupa día tras día de aumentar un ladrillo más a esa construcción mental que servirá de herramienta de vida al joven de hoy, quien será el hombre o la mujer de mañana.

Decía que nuestro trabajo es más humilde porque generalmente no trasciende el ámbito de nuestro escritorio, más cotidiano porque nos pone a prueba día tras día y menos exitoso porque nuestra acción en el aula ha probado más de una vez el sabor del fracaso. En efecto para nosotros lo importante no es tanto lo que se debería hacer sino lo que efectivamente se hace. Nos parece más apropiado medir los cambios por los frutos que dan que por las intenciones que tienen.

\*Ponencia presentada en el 2do. Seminario Nacional de Educación Secundaria.

\*\*Memorias del "1er. Seminario Nacional de Educación Secundaria". Editorial Runa - Colegio Aleman Santa María. Cochabamba, Agosto 1999.

Es bajo ese enfoque, cuyos lineamientos han guiado nuestra investigación, que vamos a participar en los cuatro cuestionamientos que nos han sido propuestos para este momento de discernimiento compartido. Estos son:

- ¿Qué enseñar?
- ¿Cómo enseñar?
- ¿Qué aprender?
- ¿Cómo aprender?

Ello, claro está, dentro del marco de nuestra competencia; es decir, el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática pre-universitaria y universitaria al servicio de la formación de administradores, contadores, economistas e ingenieros.

### ¿Qué enseñar?

Esta es una pregunta que debiendo ser de evidente respuesta tiene en nuestro medio, sin embargo, una complejidad sorprendente. La respuesta que creemos evidente es: debemos enseñar lo que es de utilidad aprender. En otras palabras propugnamos que debemos dar a nuestros niños y jóvenes los conocimientos, destrezas y habilidades que les permitan llevar una vida digna, trabajar con calidad y contribuir al desarrollo del país. La complejidad aparece cuando

...y latinamente comenzamos a cuestionarnos sobre qué significa "vida digna", cómo medimos la "calidad" y qué entendemos por "desarrollo". La cosa empeora cuando los bien intencionados desean añadir otro objetivo, so pretexto de que lo consideran fundamental, o modificar un enunciado arguyendo una falta de claridad o precisión. Entonces comenzamos a perdernos en una verborrea que como un enorme pantano nos absorbe enteros a los unos y a los otros, dejando la enseñanza como antes y la vida en el aula tan lejana de los cambios propuestos como éstos de nuestro entendimiento. La verdad que no es cosa para sorprenderse ya que somos el producto de una educación teorizante donde la palabra era reina, donde la argucia era sinónimo de inteligencia y por la que hemos aprendido a valorar la astucia por sobre la disciplina, la sagacidad por encima del reglamento. Parece entonces natural que tengamos esa pasión por las frases bonitas, los propósitos nobles y los cambios revolucionarios, aunque sean frases vacías, propósitos inalcanzables y cambios imposibles, ya que no solemos evaluar nuestras acciones ni acostumbramos a sancionar nuestros incumplimientos.

Henos ahí como somos y veamos ahora qué hacemos.

A nuestros ojos la enseñanza más importante que un colegio o una universidad debe impartir en los adolescentes y los jóvenes es el **sentido de la responsabilidad**.

Todos parecemos coincidir proclamando que el personaje central del proceso de enseñanza-aprendizaje debe ser el estudiante. El alumno como protagonista principal de dicho proceso está llamado a tomar las riendas de su propio devenir educativo y a tomar conciencia del rol fundamental que tiene en el proceso de su formación. Nuestro primer deber es empujarlo a alcanzar esa conciencia, llevarlo a comprender la importancia de participar activamente en la toma del conocimiento como instrumento de vida. Pero para alcanzar este objetivo debemos romper el sistema de suerte sin blancas,

donde todos llegan a bachilleres cualquiera que haya sido su desempeño, donde cada cual pretende entrar a la universidad sin tomar en cuenta la capacitación recibida.

Basta observar la actual formación de nuestros bachilleres para constatar que, obligados por la presión social, hemos nivelado por lo bajo. Nuestras exigencias son menores, nuestras condescendencias son mayores. Dejamos que Fulano sea bachiller, ya verá en la U lo que es canela. Permitimos que Zutano sea bachiller, pobrecito, sería vergonzoso privarlo de la graduación. Dejamos que Mengano sea bachiller, total no va ver matemáticas en derecho o no va ver lenguaje en enfermería. Dejamos que Perengano sea mediocre, total su padre tiene plata y algo siempre le hará hacer en la vida. Y aterrizan en la universidad, Fulano, Zutano, Mengano y Perengano, reclamando por las exigencias, acusando a sus maestros de todo, por todo y hasta de sus propios errores. Porque adjuntando, a nuestra laxitud, su falta de responsabilidad han aprendido a echar la culpa a otros, a rogar por un plazo extra, por un punto más, por una excepción, a pedir un favor que los exonere otra vez de su endémica ignorancia. Y terminamos acudiendo a abogados que no saben escribir, a ingenieros que no saben calcular, a periodistas que tienen una ortografía que da miedo y a médicos que parecen haber estudiado para matarnos.

Regresando a la matemática, diré que si la educación está en crisis, no es la formación matemática que está en crisis sino la formación de los valores morales y sociales. Por ello, toda propuesta estructuradora en la enseñanza de la matemática no tendrá impacto alguno si no va precedida, o al menos acompañada, de una renovación en la formación ética del educando. Lastimosamente debemos regresar a la exigencia, a la disciplina, a la caligrafía, a la ortografía, al cálculo mental y a la lectura. ¿Cuántos de nuestros alumnos han leído Don Quijote, Cien años de Soledad y Manchaypuito? ¿Cuántos de nuestros alumnos

saben cómo escribir “decisivo”, “absorber” y “suspica”? ¿Cuántos pueden decir el resultado de 21 por 12, o de 15 por 5, sin recurrir a una máquina de calcular? Lo más atroz, que en ese ámbito he vivido, es ver cómo un universitario buscaba afanosamente su máquina para conocer el resultado de 231 por 0. No menciono las innumerables veces en que a muchos de ellos les era imposible calcular la suma de dos quebrados o resolver un triángulo rectángulo. En esos tristes momentos me he preguntado qué algoritmo incomprensible hizo posible el milagro de su bachillerato y he concluido que sin lugar a dudas ese muchacho, o esa muchacha, era producto de la debilidad de una institución o de la indiferencia de un maestro. Debilidad de una institución que no estaba dispuesta a medir la calidad de la formación que impartía, indiferencia de un maestro que suelta a la intemperie un joven desprovisto de las herramientas necesarias para enfrentar la vida. Pero aquí estamos para cambiar las cosas. Continuemos.

Como la formación matemática no está en crisis (la deficiente formación matemática es fruto de la falta de valores humanos) lo que se espera que un bachiller sepa es siempre lo mismo: que sepa leer y escribir correctamente. Mejor aún si llega a expresarse correctamente.

Para entender esta esperanza, recordemos que la matemática básica es un lenguaje, que se escribe con sus propios símbolos, letras e ideogramas, escritura sujeta a una ortografía rigurosa, que se lee gracias a una sintaxis estructurada y compacta, y que se expresa dentro del ámbito de la lógica proposicional con aserciones sujetas a una cuantificación que diferencia la existencialidad de la universalidad.

No necesitamos más que eso. Pero ya es mucho.

Desglosando, debemos enseñar:

- Lo que es un símbolo.
- Los símbolos más comunes. Los que ex-

presan objetos y los que expresan relaciones entre objetos.

- Los tipos de objetos matemáticos: variables y constantes, números, funciones, proposiciones, etc.
- Los tipos de conectivos lógicos: igualdad, equivalencia, implicación, etc.
- El ensamblaje de símbolos: las ecuaciones, las inecuaciones, las proposiciones.
- La manipulación algebraica: factorización, simplificación, etc.
- La manipulación lógica: la equivalencia, la inferencia, la deducción.
- Los tipos de proposiciones: hipótesis, axiomas, tesis, teoremas, corolarios.
- Los tipos de demostraciones: directa, por el absurdo, por inducción.

Estos conocimientos deberían ser adquiridos en tres áreas (o materias): el álgebra, la lógica y la geometría.

El alumno bachiller debe saber que cada expresión matemática tiene un significado y transmite una información. Debe poder escoger los símbolos adecuados y ensamblarlos correctamente para expresar una idea matemática. Debe poder leer una expresión matemática dentro de un contexto predefinido.

El álgebra es el espacio natural para alcanzar destreza en la manipulación de los objetos matemáticos y de las expresiones matemáticas.

La lógica es el ámbito donde aprenderá a dar significado, a inferir, a deducir y a criticar.

La geometría (tanto euclidiana como trigonometría) será el campo de aplicación y práctica por excelencia de lo aprendido en álgebra y en lógica.

## ¿Cómo enseñar?

En lo que concierne a la manera de enseñar, postulamos sin ambigüedades que es

tan absurdo como iluso pretender que todos los docentes de matemáticas se alineen en un método único, definido y controlado, supuestamente eficiente, panacea nacida de un pretendido encuentro de un iluminado con la verdad. No creemos en ello. Peor aún, consideramos que la uniformización metodológica empobrece la enseñanza.

En otros términos, sustentamos la diversidad de maneras de enseñar que se generan como producto de la personalidad de cada docente, de cada maestro, en la extensión de sus conocimientos, en sus pasiones, en el legado espiritual colateral que deja a sus alumnos al ser él mismo, con sus virtudes y defectos.

Para nosotros sería vano imponer una cierta manera de llegar a la comprensión de un concepto, designándola como LA manera, pues estamos ciertos de que cada alumno, cada estudiante es un mundo aparte, con sus debilidades y fortalezas propias, con sus propias preferencias y sus propias repulsiones.

Entonces nos vamos a limitar a hablar de un camino, de una forma de encarar la enseñanza, dejando claro que no la proclamamos como la mejor pues no tenemos pruebas para hacerlo. Para nosotros este es un buen camino, tenemos indicios de que es un buen camino, que al menos place a muchos si no a todos.

El método Amabilis (actualmente en proceso de prueba en la UCB) nació de la constatación de un hecho, algo intuitivo pero frecuentemente ignorado: los estudiantes que manejan mal su idioma tienen mayores dificultades para aprender matemática.

El método Amabilis propugna que para mejorar la calidad del aprendizaje de los conceptos matemáticos, alcanzar destrezas y habilidades, la enseñanza debe tener al menos las siguientes ocho características \*\*\*

a) Usar un lenguaje de estilo coloquial y

costumbrista

- b) Desarrollar, minuciosamente y paso a paso, los ejemplos
- c) Proveer una explicación a la vez metafórica y formal de los conceptos
- d) Introducir comentarios ya sean directos o a través de personajes de apoyo
- e) Dar a conocer la historia de la matemática (de las ideas o de los actores) desde un punto de vista humano y sencillo.
- f) Usar muchos gráficos y un poco de humor
- g) Usar recursos literarios, como el cuento y la anécdota
- h) Sobre todo no olvidar las demostraciones rigurosas y la notación matemática formal

Esta receta parece mejorar apreciablemente la relación entre el estudiante y la matemática. Aquel aprende a integrar los conceptos matemáticos a su mundo personal desde el momento que los reconoce como parte integrante de su quehacer cotidiano. La clave es seguir el orden natural que conocemos:

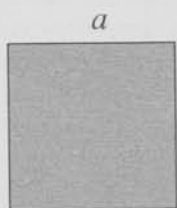
1. Sentir una necesidad (cuestionamiento) Ej. Pensamos que es justo que los que poseen más tierra paguen más impuesto. Se infiere la necesidad de medir la extensión de las propiedades.
2. Intuir una satisfacción (respuesta) Ej. Cuadricular un plano de la propiedad y aproximar el área (u otra propuesta).
3. Discernir sobre la intuición (estructuración) Ej. Cómo mejorar la aproximación.
4. Formalizar el razonamiento (análisis). Ej. Expresar los bordes de la superficie mediante funciones.
5. Evaluar la respuesta formal (crítica). Ej. Discutir por qué es posible encontrar un área negativa, etc.

Esto lo hacemos todos seguramente. Lo importante es no dejar de hacerlo incluso

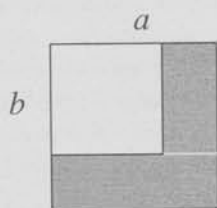
\*\*\* Última Publicación del CIMa: *Calculus Amabilis*, Acta Nova, Vol. 1 No. 2

cuando estemos sometidos a la presión del tiempo.

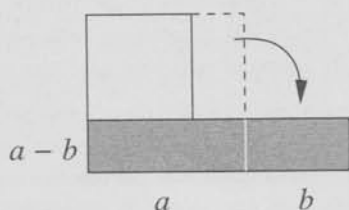
En cuanto al uso de la geometría como dominio de práctica del álgebra, nos parece sensato ilustrar esta idea con un ejemplo. Supongamos que deseamos compartir con los alumnos la "naturalidad" de la fórmula  $(a+b) \times (a-b) = a^2 - b^2$ . A fin de ayudarnos en ese propósito, dibujaremos un cuadrado de lado  $a$ :



Y dentro de él un cuadrado de lado  $b$ , suponiendo que  $a > b$



La cosa es evaluar el área que queda achurada  $a^2 - b^2$  cortando un pedazo de ella y colocándolo de otra manera. Así:



Vemos que el área achurada es  $(a+b) \times (a-b)$ , y entonces, aleluya, deducimos que  $(a+b) \times (a-b) = a^2 - b^2$ .

### ¿Qué aprender?

Lo esencial es aprender a aprender. Y para aprender a aprender hay que aprender a observar, a escuchar, a cuestionar y a leer.

La escuela debe entonces enseñar o al menos incentivar la adquisición de estas cuatro competencias: las capacidades de observación, escucha, cuestionamiento y lectura. Si un alumno las adquiere, el resto viene por añadidura. Pero claro, la cosa no es fácil puesto que la capacidad de observación apela en parte a un cierto talento personal, la capacidad de escuchar al carácter, el cuestionamiento a la inteligencia y la lectura a la voluntad.

Es esta formación integral y humana que se espera reconocer en cada bachiller en el momento de su ingreso a la universidad. Ahora bien, en lo técnico, en lo matemático, el asunto es mucho más sencillo. Creo que todos los docentes universitarios de matemática coincidimos en solicitar que el bachiller

1. Sea capaz de manipular correctamente los mecanismos algebraicos
2. Sea capaz de interpretar una ecuación dentro de un contexto
3. Sea capaz de inferir y de apreciar el valor de una demostración

Aunque parezca extraño, estas cualidades tienen mucho que ver con las de:

1. Ser capaz de situar los personajes de una novela
2. Ser capaz de interpretar una situación en una trama literaria
3. Ser capaz de sintetizar el desarrollo de una historia

Las aptitudes como las actitudes andan juntas, algo así, como me decía un colega... "quien ordena sus calcetines también escribe la barra de fracción a la altura del signo igual".

### ¿Cómo aprender?

Hay quienes hacen resúmenes, hay quienes hacen fichas, hay quienes leen tres veces, hay quienes preguntan y preguntan y

hay quienes se aíslan totalmente para subrayar frases en las páginas de un libro. Mejor, hay quienes no hacen nada más que escuchar atentamente. Peor, hay quienes hagan lo que hagan, parecen aprender muy lentamente. Las sendas que llevan a la comprensión son misteriosas. En efecto, así como algunos declaran que la música les ayuda a concentrarse, otros aseguran que ésta les impide concentrarse.

Por consiguiente, es por lo menos prudente no explicitar una receta que pretenda llevar de la ignorancia al conocimiento, en un cierto número de pasos.

Sin embargo es posible indicar ciertas características propias del proceso de aprendizaje de la matemática que todos hemos constatado de una u otra manera.

La primera es que el aprendizaje no tiene un comportamiento lineal de pendiente positiva con relación al tiempo; en otros términos, no todos los días se comprende algo nuevo, o en palabras más terribles: lo que sé no es proporcional al tiempo que estudio. El aprendizaje tiene más que ver con una función escalonada de intervalos irregulares. Los saltos, o puntos de discontinuidad, aparecen repentinamente y de manera no uniforme para cada individuo. Lo único que parece ser constante son los tópicos matemáticos que determinan el paso de una acumulación cuantitativa (# de horas de estudio, # de ejercicios hechos, # de horas de clase) al salto hacia un nivel cualitativo (dominio de un concepto). Algunas de estas nociones son las siguientes:

- Número (paso del concepto de cantidad al de número)
- Variable (paso del número concreto al de número cualquiera)
- Función

- Límite
- Ecuación diferencial
- Estructura

Los tres primeros conceptos son ejemplos de puntos críticos a nivel escolar y los tres últimos a nivel universitario.

La toma de conciencia de la existencia de puntos neurálgicos, de los saltos dialécticos (cuantitativos-cualitativos) hacen que un estudiante comprenda la necesidad de hacer muchos ejercicios, de entregarse a una práctica continua, hasta que, un buen día, un buen momento, se le prendan la lamparita y se ilumine su rostro al comprender la profundidad de un concepto o el trasfondo de un procedimiento.

En resumen y para terminar, siento repetir una verdad desnuda: que en materia de aprendizaje de la matemática no hay milagros y que todo éxito en este campo es producto de una empeñada voluntad y de un trabajo tesonero. Aprende quien quiere aprender. Nosotros sólo podemos asumir el rol de motivadores, facilitadores, guías, ejemplos o contraejemplos, y dirigir nuestra acción para allanar el camino de nuestros educandos, como lo hacemos hoy, pero nunca podremos sustituir esa llama viva que nos toca velar por mantener prendida, incólume y vigorosa en el espíritu de cada niño, de cada adolescente, de cada joven: el deseo de aprender más y de aprender mejor.

Enseñémosles a recorrer ese sendero difícil que es el aprendizaje de la vida: sin euforias, para conservar las dimensiones de los hechos, ni tormentos, para no dejarnos aplastar por la penuria, ni arrastrar hacia el abandono. Caminar mirando, más allá de las sempiternas coyunturas, el devenir promisorio de Bolivia.