Sobre una Trasgresión Numérica

Oscar R. Pino Ortiz

Centro de Investigación Matemática - C.I.M.A
Universidad Católica Boliviana San Pablo
Cochabamba, Bolivia
e-mail: pino@ucbcba.edu.bo

Resumen

Es bien conocido que si una sucesión real monótona creciente es acotada, entonces el límite de dicha sucesión existe y es menor o igual a la cota. Este trabajo muestra que tal afirmación no es verdadera si se toma como cota $\aleph_0$. Lo que aparentemente significaría una seria dificultad para la extensión de las técnicas del análisis clásico al estudio de las sucesiones transfinitas.

1 Conceptos Preliminares

Sea $\underline{\mathcal{C}}$ la categoría de los conjuntos con las aplicaciones como morfismos. Podemos definir sobre los objetos $|\,\underline{\mathcal{C}}\,|$ de esta categoría una relación de equivalencia por medio de:

$$a, b \in |\,\underline{\mathcal{C}}\,| : \qquad a \cong b \Leftrightarrow \exists\, f : a \to b \mid f \text{ es biyectiva} \tag{1}$$

Un número cardinal es entonces una clase de equivalencia de $|\,\underline{\mathcal{C}}\,|$ (que no es un conjunto) para la relación $\cong$.

Recordemos algunos de los números cardinales conocidos: $0, 1, 2, 3, \ldots$, $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\ldots$ Los primeros $0, 1, 2, 3, \ldots$ son también llamados cardinales finitos y los segundos $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$, cardinales infinitos [1, 2].

Recordemos, igualmente, que decimos que un conjunto a es infinito si existe una aplicación de a en a, inyectiva no sobreyectiva [3].

Aunque la intuición muestra como evidente que podemos definir una relación de orden total y natural sobre los números cardinales, no es fácil probar, por ejemplo, que si α y β son cardinales, entonces

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \leq \beta \\ \beta \leq \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta. \tag{2}$$

Esta última afirmación es conocida bajo el nombre de Teorema de Cantor-Bernstein [3].

Consideremos la subcategoría $\underline{\mathcal{E}} \subset \underline{\mathcal{C}}$ tal que $|\,\underline{\mathcal{E}}\,| = |\,\underline{\mathcal{C}}\,|$ y tal que los morfismos de $\underline{\mathcal{E}}$ sean los monomorfismos de $\underline{\mathcal{C}}$. No presenta dificultad mostrar que es posible definir, de manera natural, un funtor covariante $k : \underline{\mathcal{E}} \to \underline{\tilde{\mathcal{N}}}$, donde $\underline{\tilde{\mathcal{N}}}$ es la categoría de los números cardinales cuyos objetos son la clase de los símbolos $0, 1, 2, 3, \ldots, \aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$, provistos de los siguientes morfismos:

$$\mathrm{Morf}(\alpha, \beta) = \begin{cases} \{1_{\alpha\beta}\} & \text{si } \alpha \leq \beta \\ \emptyset & \text{si } \beta < \alpha \end{cases} \tag{3}$$

La composición de morfismos es, evidentemente, $1_{\beta\gamma} \circ 1_{\alpha\beta} = 1_{\alpha\gamma}$.

2 La trasgresión

Un resultado conocido en análisis es el que afirma que si $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ es un sucesión positiva tal que $u_n < a$ entonces

$$\lim_{n\uparrow} u_n \leq a \tag{4}$$

El corazón del presente artículo es mostrar que este teorema es falso si consideramos una sucesión $u : \mathbb{N} \to \underline{\tilde{\mathcal{N}}}$. En efecto vamos a probar que es posible construir una sucesión u en $\underline{\tilde{\mathcal{N}}}$ tal que $u_n < \aleph_0$ y sin embargo $\lim\limits_{n\uparrow} u_n > \aleph_0$.

Sea $A_n \subset \mathbb{N}$, un conjunto de cardinalidad n, digamos $A_n = \{1; 2; 3; \ldots; n\}$. La cardinalidad de $\mathcal{P}(A_n)$ es 2^n. La sucesión que nos interesa es definida como la composición de:

$$\begin{array}{c} \mathbb{N} \to |\,\underline{\mathcal{E}}\,| \\ n \mapsto A_n \end{array}, \quad \begin{array}{c} |\,\underline{\mathcal{E}}\,| \to |\,\underline{\mathcal{E}}\,| \\ A \mapsto \mathcal{P}(A) \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{c} |\,\underline{\mathcal{E}}\,| \to |\,\underline{\tilde{\mathcal{N}}}\,| \\ A \mapsto k(A) \end{array} \tag{5}$$

Es decir, $u : \mathbb{N} \to \underline{\tilde{\mathcal{N}}}$ es tal que $u_n = u(n) = k(\mathcal{P}(A_n)) = 2^n$. Es claro que $2^n < \aleph_0 \, \forall n \in \mathbb{N}$. Sin embargo,

$$\begin{aligned} \lim_{n\uparrow} u_n &= k\left(\lim_{n\uparrow} \mathcal{P}(A_n)\right) = k\left(\mathcal{P}\left(\lim_{n\uparrow} A_n\right)\right) \\ &= k(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = k(\mathbb{R}) = \aleph_1 > \aleph_0 \quad {}^1 \end{aligned} \tag{6}$$

[1] No está demás aclarar, para los lectores no matemáticos, que la igualdad $\lim\limits_{n\uparrow} \mathcal{P}(A_n) = \mathcal{P}\left(\lim\limits_{n\uparrow} A_n\right)$ se demuestra observando que ambos conjuntos poseen los mismos elementos. Por ejemplo, está claro que $\lim\limits_{n\uparrow} A_n = \mathbb{N}$ y por lo tanto que $\mathbb{N} \in \mathcal{P}(\lim\limits_{n\uparrow} A_n)$. Para ver que $\mathbb{N}$ también pertenece a $\lim\limits_{n\uparrow} \mathcal{P}(A_n)$, basta observar que $A_n \in \mathcal{P}(A_n) \Rightarrow \lim\limits_{n\uparrow} A_n \in \lim\limits_{n\uparrow} \mathcal{P}(A_n)$. Así, todo subconjunto M de $\mathbb{N}$ pertenecerá a $\lim\limits_{n\uparrow} \mathcal{P}(A_n)$, ya que $M \cap A_n \in \mathcal{P}(A_n) \Rightarrow M = \lim\limits_{n\uparrow}(M \cap A_n) \in \lim\limits_{n\uparrow} \mathcal{P}(A_n)$. Concluimos que $\lim\limits_{n\uparrow} \mathcal{P}(A_n) \supset \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{P}\left(\lim\limits_{n\uparrow} A_n\right)$. La otra inclusión no presenta dificultad ya que es bien sabido que $A_n \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \Rightarrow \mathcal{P}(A_n) \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}) \Rightarrow \lim\limits_{n\uparrow} \mathcal{P}(A_n) \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Por lo tanto ambos conjuntos tienen la misma cardinalidad $\aleph_1$.

El único punto cuyo significado puede ser eventualmente algo confuso es el de $\lim_{n\uparrow} A_n$. Basta observar que $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n \subset$, que por lo tanto

$$\lim_{n\uparrow} A_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n \tag{7}$$

y que

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n = \mathbb{N} \tag{8}$$

Peor aún, podemos mostrar que el límite de una sucesión constante no es lo que uno espera, es decir, la constante. En efecto, consideremos la sucesión $v : \mathbb{N} \to \underline{\tilde{\mathcal{N}}}$ tal que $v_n = v(n) = k(\mathbb{N}^n)$. Esta sucesión es constante porque $\mathbb{N} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y entonces $\mathbb{N} \cong \mathbb{N}^n \, \forall n \in \mathbb{N}$. Podemos escribir $v_n = k(\mathbb{N}^n) = \aleph_0, \forall n \in \mathbb{N}$. Pero si tomamos el límite cuando n crece indefinidamente...

$$\lim_{n\uparrow} v_n = \lim_{n\uparrow} k\left(\mathbb{N}^n\right) = k\left(\lim_{n\uparrow} \mathbb{N}^n\right) = k\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right) = k(\mathbb{R}) = \aleph_1 \tag{9}$$

Sorprendente ¿no es verdad?. Pero no tanto si consideramos una "evaluación" discontinua sobre, por ejemplo, el intervalo $[0;1]$:

$$e : [0:1] \to \{0;1\} \text{ tal que } e(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Ahora, si definimos la sucesión $v : \mathbb{N} \to [0;1]$ por $v_n = e\left(\frac{1}{n}\right)$, tendremos la sucesión constante $v_n = 0$ cuyo límite, cuando n crece indefinidamente, no es 0, sino 1. En efecto:

$$\lim_{n\uparrow} v_n = \lim_{n\uparrow} e\left(\frac{1}{n}\right) = e\left(\lim_{n\uparrow} \frac{1}{n}\right) = e(0) = 1 \tag{11}$$

A todas luces, en este caso, la "sorpresa" viene del intercambio $\lim_{n\uparrow} e\left(\frac{1}{n}\right) = e\left(\lim_{n\uparrow} \frac{1}{n}\right)$.

Estamos tentados a deducir que el funtor k se comporta como una "evaluación discontinua" entre la finitud y la infinitud. Así se explicaría la trasgresión numérica que nos ocupó en estas notas.

Referencias

[1] G. Cantor. *Contributions to the foundings of the theory of Transfinite Numbers.* Dover Publications, New York, 1955.

[2] L. Rodríguez y O. Pino. *Irracionalidad y Trascendencia.* Inédito, 1994.

[3] S. Vasilach. *Ensembles, Structures, Catégories, Faisceaux.* Masson, Paris, 1977.