

PREDICCIÓN DE COTIZACIONES ANUALES PROMEDIO DE LOS PRINCIPALES MINERALES EXPLOTADOS EN BOLIVIA, PARA EL PERIODO 2014-2024

Rubén Medinaceli Tórrez

Universidad Técnica de Oruro, Oruro, Bolivia, r.medinaceli.torrez@gmail.com

RESUMEN

La industria minera es una de las más importantes en el país; por ello, exige bastante atención desde el punto de vista científico y tecnológico. La vida de un proyecto minero fácilmente supera los veinte años, el periodo de tiempo desde el momento en el que una campaña de exploración verifica la existencia de un cuerpo mineralizado explotable y el inicio de la explotación misma puede fácilmente, dependiendo del tamaño del depósito mineralizado, sobrepasar los cinco o diez años. En otras palabras, si hoy decidimos explotar un cuerpo mineralizado, la explotación misma se iniciará en cinco a diez años. Esto significa que es absolutamente necesario estimar o predecir cotizaciones y costos para periodos de tiempo considerables, diez o veinte años.

Por ello es importante desarrollar modelos de predicción propios y utilizar los mismos para predecir en este caso, cotizaciones de los minerales que se explotan en el país (Au, Ag y Sn).

Hay varias alternativas para construir modelos de predicción de cotizaciones de minerales; desde complejos modelos econométricos de predicción hasta modelos simples basados en su análisis de tendencia.

El concepto de análisis de tendencia es ajustar una línea de tendencia, utilizando el análisis de regresión o las series de tiempo a datos históricos de la cotización del mineral de interés. Este método puede a menudo proporcionar una primera buena aproximación de cotizaciones futuras.

Los métodos econométricos de predicción de cotizaciones implican la modelización de las interrelaciones entre la oferta, la demanda y elementos de costos de uno a más minerales.

El presente trabajo propone construir modelos de predicción de cotizaciones para los minerales Au, Ag y Sn. En cada caso se efectuará un análisis de tendencia además de proponer un modelo econométrico. Se utilizarán ambos modelos para predecir las cotizaciones anuales promedio de los minerales anotados para el periodo 2014-2023. Se validará cada uno de los modelos y se recomendará el más conveniente para el propósito anotado.

PALABRAS CLAVE: predicción - cotizaciones - minerales – Bolivia.

AVERAGE ANNUAL QUOTE PREDICTION OF THE MAIN MINERALS EXPLOITED IN BOLIVIA, FOR THE PERIOD 2014-2024

ABSTRACT

The mining industry is one of the most important in the country; Therefore, it requires a lot of attention from a scientific and technological point of view. The life of a mining project easily exceeds twenty years, the period of time from the moment in which an exploration campaign verifies the existence of an exploitable mineralized body and the beginning of the exploitation itself can easily, depending on the size of the mineralized deposit, exceed five or ten years. In other words, if today we decide to exploit a mineralized body, the exploitation itself will begin in five to ten years. This means that it is absolutely necessary to estimate or predict quotes and costs for considerable periods of time, ten or twenty years.

Therefore, it is important to develop our own prediction models and use them to predict in this case, prices of the minerals that are exploited in the country (Au, Ag and Sn).

There are several alternatives to build prediction models for mineral quotes; from complex econometric prediction models to simple models based on their trend analysis.

The concept of trend analysis is to adjust a trend line, using regression analysis or time series to historical data of the price of the mineral of interest. This method can often provide a good first estimate of future quotes.

Econometric methods of price prediction involve modeling the interrelationships between supply, demand and cost elements from one to more minerals.

The present work proposes to build quotation prediction models for the Au, Ag and Sn minerals. In each case a trend analysis will be carried out in addition to proposing an econometric model. Both models will be used to predict the average annual prices of the minerals listed for the 2014-2023 period. Each of the models will be validated and the most convenient for the purpose noted will be recommended.

KEY WORDS: prediction - quotations - minerals - Bolivia.

1. INTRODUCCIÓN.

La predicción de cotizaciones de metales y minerales es una tarea muy compleja y riesgosa. Si se desea efectuar una predicción más o menos precisa, se deben modelar todas las complejidades que implican la comercialización y la producción de un mineral. Sin embargo aún con el modelo más detallado la economía puede cambiar repentinamente invalidar cualquier predicción.

En la mayoría de los casos las compañías mineras no cuentan con un grupo encargado de predicciones económicas y es así que el ingeniero debe desarrollar su propio modelo de predicción.

Existen muchas opciones desde los modelos econométricos complejos hasta el simple análisis de tendencia.

Modelos econométricos.-

Estos modelos implican modelar las interrelaciones entre la oferta, el consumo, elementos de costos, etc. para uno o más minerales, estos modelos pueden ser extremadamente complejos y son generalmente desarrollados por grupos especializados. La mayor ventaja de estos modelos radica en su gran destreza para predecir ciclos de mercado a corto plazo y evaluar el efecto de cambios en la estructura mercado – producción. La mayor desventaja es

que su complejidad los sitúa más allá del alcance de muchos ingenieros.

Análisis de tendencia.-

La idea del análisis de tendencia es ajustar una línea de tendencia a datos históricos utilizando la regresión por mínimos cuadrados. Este método pueden menudo proporcionar una buena primera aproximación de cotizaciones futuras. Sin embargo, se deben tomar algunas precauciones cuando se utiliza la regresión con fines de predicción de cotizaciones.

Las cotizaciones siguen generalmente un comportamiento cíclico, la línea de tendencia debe ser calculada sobre un periodo de varios ciclos.

La línea de regresión representa una tendencia promedio a largo plazo donde las fluctuaciones periódicas han sido removidas es necesario efectuar un análisis de sensibilidad ya que la cotización actual estará por encima o por debajo de la tendencia.

La tendencia puede ser calculada ya sea utilizando cotizaciones actuales o cotizaciones convertidas a dólares constantes. La ventaja de utilizar dólares constantes es que la línea de tendencia resulta independiente de las tasas de inflación y ambas cotizaciones y costos se pueden expresar en dólares constantes.

Dada la importancia actual de la industria minera tener predicciones de las cotizaciones de los minerales más explotados en el país para los próximos diez años va a facilitar enormemente el trabajo de los ingenieros de minas que tiene a su cargo proyectos de diseño y planificación de minas. Es más, además de predicciones, el proyecto proporcionará los modelos de predicción utilizados con parámetros estimados. La disponibilidad de los modelos de predicción con parámetros estimados permitirá que cualquier ingeniero pueda hacer uso de los mismos para efectuar predicciones; esto no siempre es así, la mayoría de los que han desarrollado trabajos similares ofrecen generalmente las predicciones, la forma general del modelo utilizado y muy raras veces los parámetros estimados del modelo. Las predicciones a ser obtenidas facilitarán además la toma de decisiones sobre la continuidad de algunas operaciones mineras.

El presente trabajo de investigación se circunscribe a predecir el comportamiento de las cotizaciones del oro, la plata y el estaño durante los próximos años, considerando un nivel de confiabilidad asociado a dichas predicciones, mediante modelos de predicción utilizando herramientas de la estadística

clásica como el análisis de regresión lineal simple, el análisis de correlación, el análisis de regresión lineal múltiple, el análisis de las series de tiempo y el análisis de varianza.

Se busca entonces predecir las cotizaciones del oro, la plata y el estaño para los próximos diez años con un buen nivel de confiabilidad.

Es importante señalar que estos métodos estadísticos han sido desarrollados hace varias décadas atrás y en realidad queda muy poco que investigar para complementarlos. Es más, en la actualidad se cuenta con software sofisticado para la aplicación de estos métodos. La dificultad se encuentra en el hecho de que se tiene muy poco dominio de estos métodos y obviamente su aplicación en la construcción de modelos resulta ser un ejercicio difícil.

2. OBTENCIÓN DE DATOS.

En las Figura N°. 1, 2, 3, 4 y 5 se han graficado las cotizaciones anuales promedio del Au, Ag, Sn, Pb y Zn en función del año (cotizaciones promedio del Au, Ag para el periodo 1950 – 2013, Sn, Pb y Zn para el periodo de 1992 – 2013 - Fuente: INE).

Figura N°. 1 Cotización anual promedio del Au en función del año.

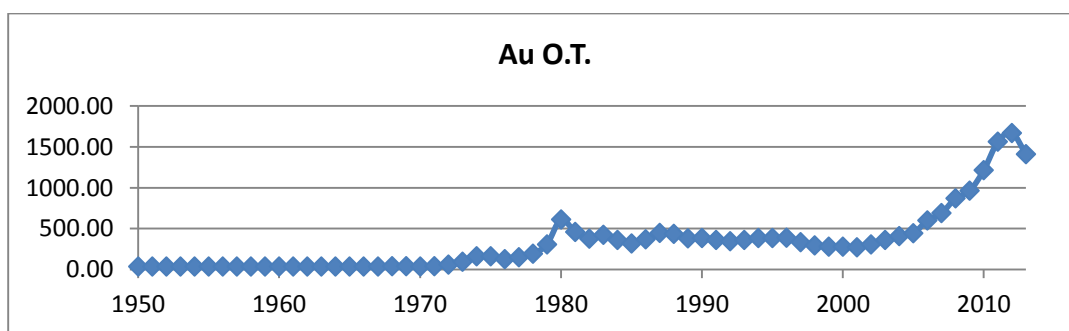


Figura N°. 2 Cotización anual promedio del Ag en función del año.

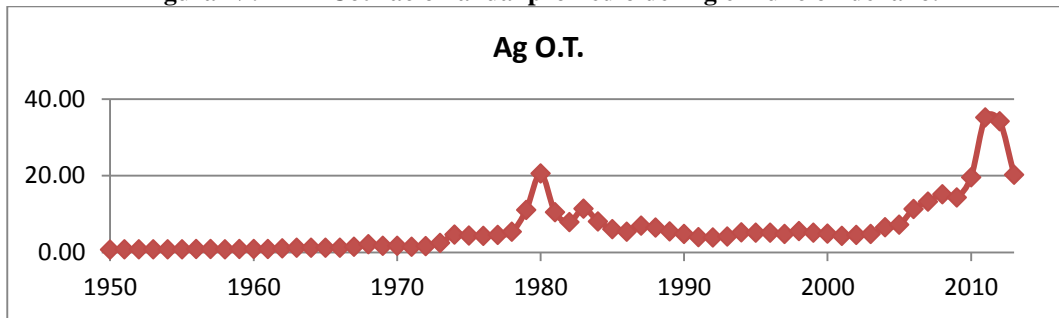


Figura N°. 3 Cotización anual promedio del Sn en función del año.

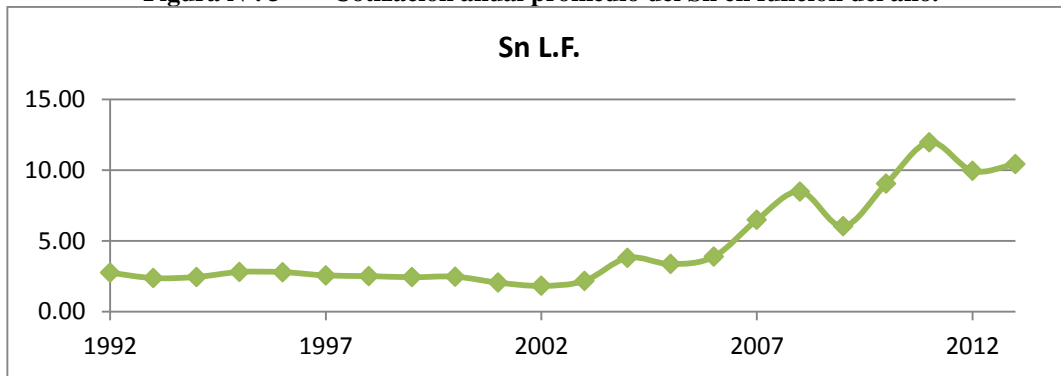
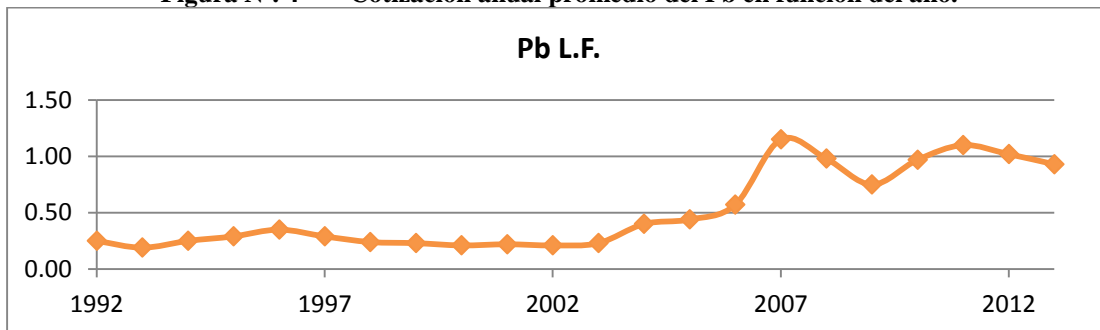


Figura N°. 4 Cotización anual promedio del Pb en función del año.



SELECCIÓN DEL MODELO DE PREDICCIÓN.-

De este gráfico se puede concluir que el modelo apropiado para estudiar el comportamiento de la cotización anual del Au, Ag, Sn, Pb y Zn es una curva exponencial ($y = ae^{bx}$). Este hecho queda confirmado los

valores logarítmicos (naturales) de las cotizaciones anuales de Au, Ag, Sn, Pb y Zn en función del año. Estos gráficos se muestran en las Figuras N°. 6, 7, 8, 9 y 10. Nótese que los valores se distribuyen aproximadamente a lo largo de una recta.

Figura N°. 5 Cotización anual promedio del Zn en función del año.

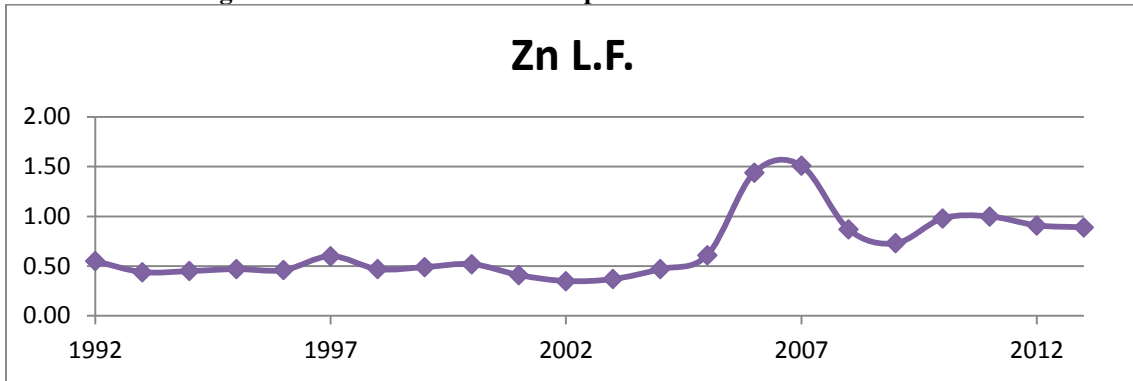


FIGURA N°. 6 Cotización anual promedio del Au (Transformación logarítmica).

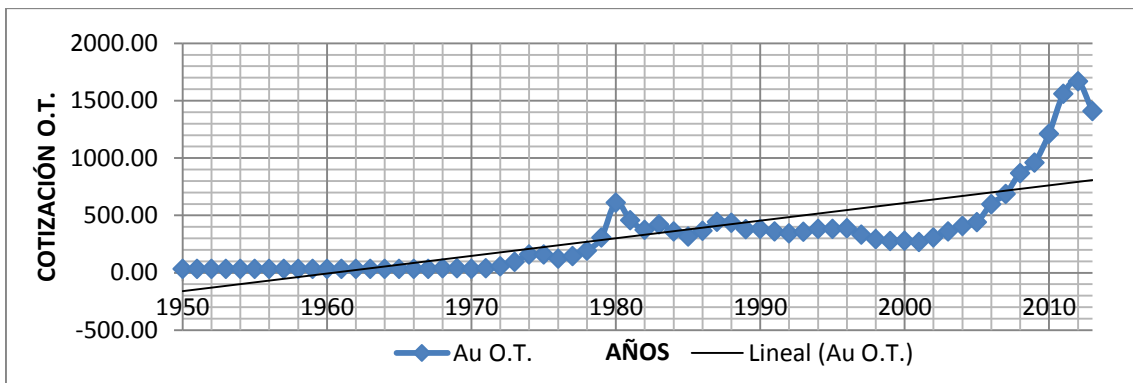


FIGURA N°. 7 Cotización anual promedio del Ag (Transformación logarítmica).

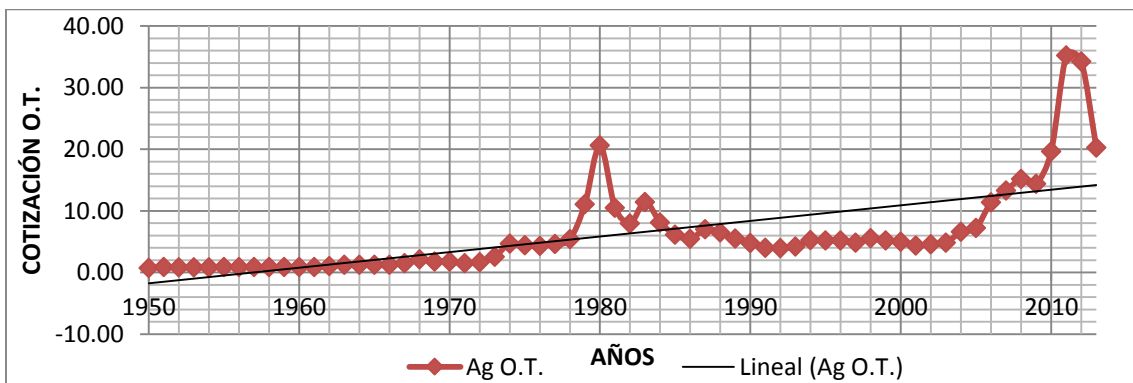


FIGURA Nº. 8 Cotización anual promedio del Sn (Transformación logarítmica).

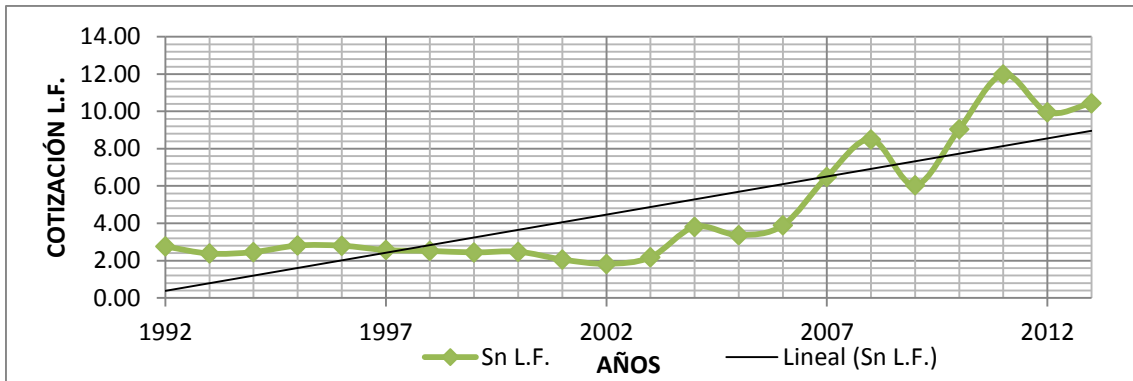


FIGURA Nº. 9 Cotización anual promedio del Pb (Transformación logarítmica).

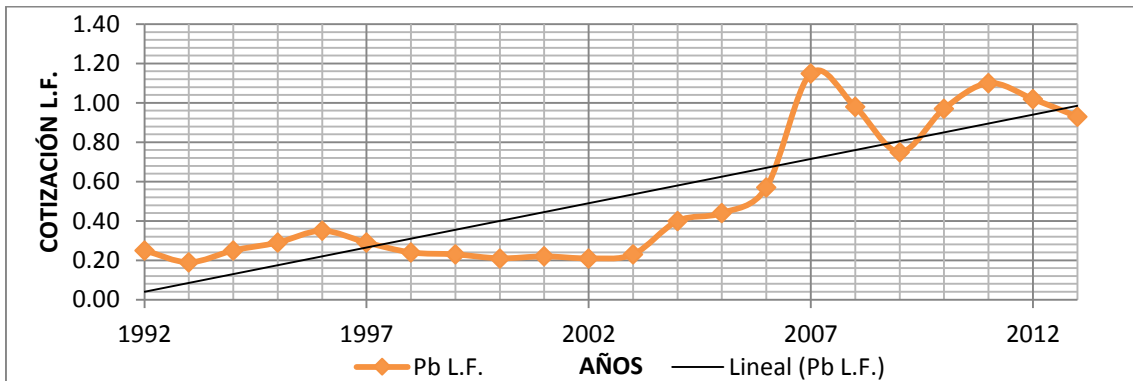


FIGURA Nº. 10 Cotización anual promedio del Zn (Transformación logarítmica).

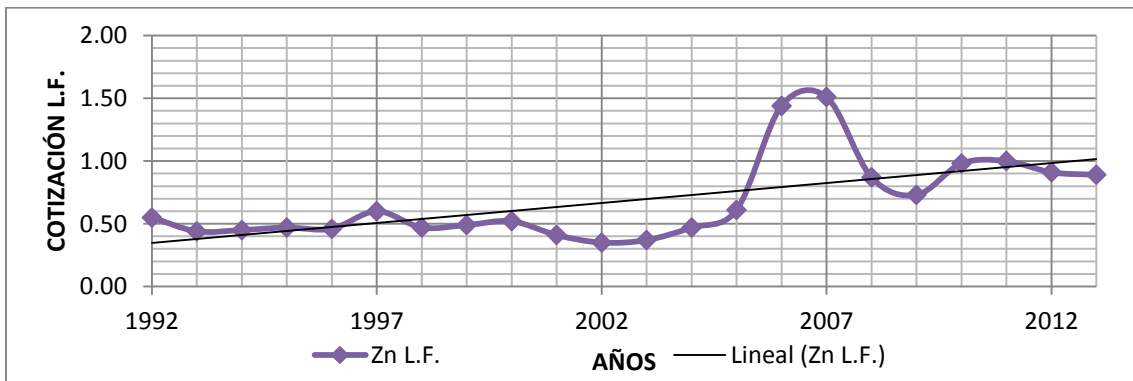


Tabla Nº 2 Selección del modelo de predicción.

MINERAL	MODELO
Au	Exponencial
Ag	Exponencial
Sn	Exponencial
Pb	Exponencial

Zn	Exponencial
----	-------------

ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DE LOS MODELOS DE PREDICCIÓN.-

El modelo que se requiere ajustar entonces es del tipo:

$$Y = ae^{bx}; \text{ Cotización} = ae^{b(\text{año})}$$

Ó luego de una transformación logarítmica:

$$\ln Y = \ln a + bx; \ln(\text{Cotización}) = \ln a + b(\text{año})$$

A continuación se pueden ver las expresiones que nos permiten estimar los parámetros de este modelo son:

$$\ln a = \frac{\sum \ln Y_i - b \sum x_i}{n}$$

$$b = \frac{n \sum x_i \ln Y_i - \sum \ln Y_i \sum x_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

También es posible calcular el coeficiente de correlación (r^2) utilizando la ecuación que

Reemplazando los valores se tiene:

n =	64
b =	0.0623
ln a =	3.1583
a =	23.5304

Por tanto, el modelo resulta ser:

$$\ln(\text{cotización}) = 3,1583 + 0,0623(\text{año})$$

Sacando el antilogaritmo de Ln a; a = 23,5304, el modelo adquiere la forma final:

$$\text{Cotización} = 23,5304e^{0,0623(\text{año})}$$

Nota.- Para este modelo se han utilizado años relativos (Tabla N° 3) con la finalidad de evitar manipular números grandes.

Para el coeficiente de correlación reemplazando valores:

$r^2 =$	0.8508
$r =$	0.9224

3. VALIDACIÓN DEL MODELO

Para poder saber si nuestro modelo predice valores futuros pensaremos que nos encontramos en el año 2010 y las predicciones para los años 2011, 2012 y 2013 se efectuarán obteniendo los años relativos para estos años y reemplazando estos últimos valores en el modelo obtenido.

para el efecto se muestra a continuación: (Para el modelo exponencial).

$$r^2 = \frac{\ln a \sum \ln Y_i + b \sum x_i \ln Y_i - \frac{1}{n} (\sum \ln Y_i)^2}{\sum (\ln Y_i)^2 - \frac{1}{n} (\sum \ln Y_i)^2}$$

Por ejemplo en el caso de Oro se tiene lo siguiente:

Para todos los cálculos mostrados a continuación se usó la tabla 3.

En base al valor de r (0,9224) se puede indicar que existe una correlación lineal fuerte entre el $\ln(\text{cotización})$ y el año. En otras palabras, el modelo exponencial describe en gran forma el comportamiento de la cotización anual del Oro.

De manera similar se han estimado los parámetros del modelo para la Ag, Sn, Pb y Zn:

TABLA N° 4 Parámetros de los modelos.

MINERAL	MODELO ESTIMADO	COEF. DE CORRELACIÓN
ORO (Au)	$Y = 23,5304 * e^{0,0623x}$	$r^2 = 0,8508; r = 0,9224$
PLATA (Ag)	$Y = 0,8017 * e^{0,0487x}$	$r^2 = 0,7610; r = 0,8724$
ESTAÑO (Sn)	$Y = 1,6989 * e^{0,0780x}$	$r^2 = 0,6906; r = 0,8310$
PLOMO (Pb)	$Y = 0,1679 * e^{0,0859x}$	$r^2 = 0,7182; r = 0,8475$
ZINC (Zn)	$Y = 0,3914 * e^{0,0440x}$	$r^2 = 0,4551; r = 0,6746$

Elaboración propia.

Con los modelos para el periodo 1950 – 2010 en el caso del Au y Ag y 1992 – 2010 en el caso del Sn, Pb, y Zn se han efectuado las predicciones para los años 2011, 2012 y 2013 en términos de intervalos de confianza. Para este propósito se han utilizado las siguientes expresiones:

TABLA Nº 3. Datos para cálculo de parámetros en el Au.

AÑO	AÑO RELATIVO Xi	COTIZACIÓN (Yi)	Xi^2	$\ln Yi = Ui$	$Xi * \ln Yi$	$(\ln Yi)^2$	COTIZACIÓN ESTIMADA Yi	$\ln Yi = Ui (Ui - Up)^2$	$(Xi - Xp)^2$
1950	0	35.00	0.000	3.555	0.000	12.640	23.530	2.120	900.000
1951	1	35.00	1.000	3.555	3.555	12.640	25.043	2.120	841.000
1952	2	35.00	4.000	3.555	7.111	12.640	26.653	2.120	784.000
1953	3	35.00	9.000	3.555	10.666	12.640	28.366	2.120	729.000
1954	4	35.00	16.000	3.555	14.221	12.640	30.189	2.120	676.000
1955	5	35.00	25.000	3.555	17.777	12.640	32.130	2.120	625.000
1956	6	35.00	36.000	3.555	21.332	12.640	34.195	2.120	576.000
1957	7	35.00	49.000	3.555	24.887	12.640	36.393	2.120	529.000
1958	8	35.00	64.000	3.555	28.443	12.640	38.733	2.120	484.000
1959	9	35.00	81.000	3.555	31.998	12.640	41.222	2.120	441.000
1960	10	35.00	100.000	3.555	35.553	12.640	43.872	2.120	400.000
1961	11	35.00	121.000	3.555	39.109	12.640	46.692	2.120	361.000
1962	12	35.00	144.000	3.555	42.664	12.640	49.693	2.120	324.000
1963	13	35.00	169.000	3.555	46.220	12.640	52.888	2.120	289.000
1964	14	35.00	196.000	3.555	49.775	12.640	56.287	2.120	256.000
1965	15	35.00	225.000	3.555	53.330	12.640	59.906	2.120	225.000
1966	16	35.00	256.000	3.555	56.886	12.640	63.756	2.120	196.000
1967	17	35.00	289.000	3.555	60.441	12.640	67.854	2.120	169.000
1968	18	39.70	324.000	3.681	66.264	13.552	72.216	1.769	144.000
1969	19	41.30	361.000	3.721	70.696	13.845	76.858	1.666	121.000
1970	20	36.20	400.000	3.589	71.781	12.881	81.799	2.023	100.000
1971	21	41.10	441.000	3.716	78.036	13.809	87.057	1.678	81.000
1972	22	58.40	484.000	4.067	89.481	16.543	92.653	0.891	64.000
1973	23	95.60	529.000	4.560	104.884	20.795	98.608	0.204	49.000
1974	24	159.60	576.000	5.073	121.744	25.732	104.947	0.004	36.000
1975	25	161.20	625.000	5.083	127.066	25.833	111.693	0.005	25.000
1976	26	124.90	676.000	4.828	125.515	23.305	118.872	0.034	16.000
1977	27	148.00	729.000	4.997	134.925	24.972	126.513	0.000	9.000
1978	28	193.40	784.000	5.265	147.413	27.718	134.646	0.064	4.000
1979	29	307.60	841.000	5.729	166.135	32.819	143.301	0.515	1.000
1980	30	612.50	900.000	6.418	192.526	41.185	152.512	1.977	0.000
1981	31	459.60	961.000	6.130	190.041	37.581	162.316	1.252	1.000
1982	32	376.00	1024.000	5.930	189.747	35.160	172.749	0.843	4.000
1983	33	423.80	1089.000	6.049	199.626	36.594	183.853	1.077	9.000
1984	34	360.30	1156.000	5.887	200.156	34.656	195.671	0.766	16.000
1985	35	317.30	1225.000	5.760	201.595	33.176	208.249	0.560	25.000
1986	36	367.90	1296.000	5.908	212.681	34.902	221.635	0.803	36.000
1987	37	446.40	1369.000	6.101	225.745	37.225	235.882	1.188	49.000
1988	38	436.90	1444.000	6.080	231.029	36.963	251.045	1.141	64.000
1989	39	381.30	1521.000	5.944	231.800	35.326	267.182	0.869	81.000
1990	40	383.60	1600.000	5.950	237.984	35.398	284.356	0.880	100.000
1991	41	362.00	1681.000	5.892	241.557	34.711	302.634	0.775	121.000
1992	42	343.70	1764.000	5.840	245.270	34.103	322.088	0.686	144.000
1993	43	359.70	1849.000	5.885	253.067	34.636	342.791	0.764	169.000
1994	44	384.33	1936.000	5.952	261.866	35.420	364.826	0.884	196.000
1995	45	383.91	2025.000	5.950	267.768	35.407	388.277	0.882	225.000
1996	46	388.84	2116.000	5.963	274.306	35.559	413.235	0.906	256.000
1997	47	334.51	2209.000	5.813	273.195	33.787	439.798	0.642	289.000
1998	48	294.16	2304.000	5.684	272.838	32.309	468.068	0.452	324.000
1999	49	279.19	2401.000	5.632	275.963	31.718	498.156	0.385	361.000
2000	50	279.88	2500.000	5.634	281.718	31.746	530.177	0.388	400.000
2001	51	270.88	2601.000	5.602	285.685	31.379	564.257	0.348	441.000
2002	52	307.47	2704.000	5.728	297.876	32.814	600.527	0.514	484.000
2003	53	360.85	2809.000	5.888	312.089	34.674	639.129	0.769	529.000
2004	54	408.18	2916.000	6.012	324.632	36.141	680.212	1.001	576.000
2005	55	442.26	3025.000	6.092	335.054	37.111	723.936	1.167	625.000
2006	56	599.55	3136.000	6.396	358.186	40.911	770.470	1.917	676.000
2007	57	688.98	3249.000	6.535	372.507	42.709	819.996	2.322	729.000
2008	58	870.74	3364.000	6.769	392.622	45.824	872.705	3.090	784.000
2009	59	962.23	3481.000	6.869	405.286	47.187	928.802	3.451	841.000
2010	60	1213.59	3600.000	7.101	426.080	50.429	988.505	4.368	900.000
2011	61	1561.59	3721.000	7.353	448.561	54.073	1052.046	5.485	961.000
2012	62	1668.81	3844.000	7.420	460.032	55.054	1119.672	5.800	1024.000
2013	63	1411.71	3969.000	7.253	456.911	52.600	1191.644	5.023	1089.000
Σ	2016.000		85344.000	327.724	11683.909	1777.804		100.393	21984.000

El modelo que se requiere ajustar entonces es del tipo:

$$Y = ae^{bx}; \text{Cotización} = ae^{b(\text{año})}$$

Ó luego de una transformación logarítmica:

$$\ln Y = \ln a + bx; \ln(\text{Cotización}) = \ln a + b(\text{año})$$

A continuación se pueden ver las expresiones que nos permiten estimar los parámetros de este modelo son:

$$\ln a = \frac{\sum \ln Y_i - b \sum x_i}{n}; \quad b = \frac{n \sum x_i \ln Y_i - \sum \ln Y_i \sum x_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Los intervalos de confiabilidad para estas predicciones se calculan utilizando las siguientes fórmulas:

$$\text{Límite superior} = ae^{bx+c}$$

$$\text{Límite inferior} = ae^{bx-c}$$

$$\text{donde: } c = t(1 - r^2)^{\frac{1}{2}} \left[S_y^2 + \frac{(x - \bar{x})^2}{(n - 2)S_x^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Reemplazando valores:

intervalos de confiabilidad		
t =	1,6450	n= 61
Xprom =	30,0000	
Sx^2 =	315,1667	
Uprom =	5,0114	
Sy^2 =	1,6732	
b =	0,0607	
ln a =	3,1911	
a =	24,3140	

Si se desea efectuar una predicción para 2011 por ejemplo:

Dónde:

t = Valor de la distribución t student correspondiente al nivel de confiabilidad (1 - α).

r² = Coeficiente de determinación.

S_y² = Varianza de ln Y_i = U_i

x

= Valor de x para el cual se efectúa la predicción.

\bar{x}

= media aritmética de los x_i (años relativos).

n = Número de datos.

S_x² = Varianza de los x_i

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}; \quad S_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}; \quad \bar{U}$$

$$= \frac{\sum \ln Y_i}{n}; \quad S_y^2$$

$$= \frac{\sum (U_i - \bar{U})^2}{n - 1}$$

Por ejemplo para el Au se usó la Tabla N° 5 para realizar los cálculos:

$$\begin{aligned} \text{Cotización (2011)} &= 24,3140e^{0,0607*61} \\ &= 984,882 \text{ Sus/O.T.} \end{aligned}$$

(61 es el año relativo correspondiente a 2011). Para los límites del intervalo de confiabilidad se calcula “c” inicialmente: t = 1,6450 para una confiabilidad del 95% y v = n - 2 = 59 grados de libertad.

Se han obtenido las siguientes predicciones en términos de intervalos de confiabilidad mismas que se muestran en la Tabla N° 6 y en la Figura N° 11.

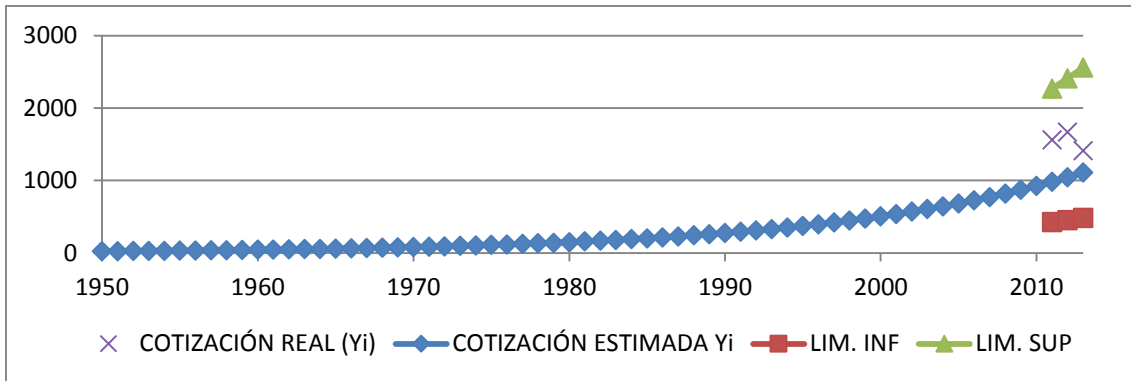
TABLA N° 6. Predicciones en términos de intervalos de confianza.

AÑO	AÑO RELATIVO X _i	COTIZACIÓN (Y _i)	c	Lim. Inf	COTIZACIÓN ESTIMADA Y _i	Lim. Sup.
2011	61	1561,59	0,8346	427,5064	984,882	2268,9560
2012	62	1668,81	0,8354	454,2506	1046,495	2410,8988
2013	63	1411,71	0,8362	482,6679	1111,963	2561,7213

TABLA Nº 5 Datos para el cálculo de intervalos de confiabilidad.

AÑO	AÑO RELATIVO Xi	COTIZACIÓN (Yi)	Xi^2	$\ln Yi = Ui$	$Xi * \ln Yi$	$(\ln Yi)^2$	COTIZACIÓN ESTIMADA Yi	$\ln Yi = Ui (Ui - Up)^2$	$(Xi - Xp)^2$
1950	0	35.00	0.000	3.555	0.000	12.640	24.314	2.120	900.000
1951	1	35.00	1.000	3.555	3.555	12.640	25.835	2.120	841.000
1952	2	35.00	4.000	3.555	7.111	12.640	27.451	2.120	784.000
1953	3	35.00	9.000	3.555	10.666	12.640	29.169	2.120	729.000
1954	4	35.00	16.000	3.555	14.221	12.640	30.993	2.120	676.000
1955	5	35.00	25.000	3.555	17.777	12.640	32.932	2.120	625.000
1956	6	35.00	36.000	3.555	21.332	12.640	34.992	2.120	576.000
1957	7	35.00	49.000	3.555	24.887	12.640	37.182	2.120	529.000
1958	8	35.00	64.000	3.555	28.443	12.640	39.508	2.120	484.000
1959	9	35.00	81.000	3.555	31.998	12.640	41.979	2.120	441.000
1960	10	35.00	100.000	3.555	35.553	12.640	44.605	2.120	400.000
1961	11	35.00	121.000	3.555	39.109	12.640	47.396	2.120	361.000
1962	12	35.00	144.000	3.555	42.664	12.640	50.361	2.120	324.000
1963	13	35.00	169.000	3.555	46.220	12.640	53.511	2.120	289.000
1964	14	35.00	196.000	3.555	49.775	12.640	56.859	2.120	256.000
1965	15	35.00	225.000	3.555	53.330	12.640	60.416	2.120	225.000
1966	16	35.00	256.000	3.555	56.886	12.640	64.195	2.120	196.000
1967	17	35.00	289.000	3.555	60.441	12.640	68.211	2.120	169.000
1968	18	39.70	324.000	3.681	66.264	13.552	72.479	1.769	144.000
1969	19	41.30	361.000	3.721	70.696	13.845	77.013	1.666	121.000
1970	20	36.20	400.000	3.589	71.781	12.881	81.831	2.023	100.000
1971	21	41.10	441.000	3.716	78.036	13.809	86.950	1.678	81.000
1972	22	58.40	484.000	4.067	89.481	16.543	92.389	0.891	64.000
1973	23	95.60	529.000	4.560	104.884	20.795	98.169	0.204	49.000
1974	24	159.60	576.000	5.073	121.744	25.732	104.310	0.004	36.000
1975	25	161.20	625.000	5.083	127.066	25.833	110.836	0.005	25.000
1976	26	124.90	676.000	4.828	125.515	23.305	117.769	0.034	16.000
1977	27	148.00	729.000	4.997	134.925	24.972	125.137	0.000	9.000
1978	28	193.40	784.000	5.265	147.413	27.718	132.965	0.064	4.000
1979	29	307.60	841.000	5.729	166.135	32.819	141.284	0.515	1.000
1980	30	612.50	900.000	6.418	192.526	41.185	150.122	1.977	0.000
1981	31	459.60	961.000	6.130	190.041	37.581	159.513	1.252	1.000
1982	32	376.00	1024.000	5.930	189.747	35.160	169.492	0.843	4.000
1983	33	423.80	1089.000	6.049	199.626	36.594	180.096	1.077	9.000
1984	34	360.30	1156.000	5.887	200.156	34.656	191.362	0.766	16.000
1985	35	317.30	1225.000	5.760	201.595	33.176	203.333	0.560	25.000
1986	36	367.90	1296.000	5.908	212.681	34.902	216.054	0.803	36.000
1987	37	446.40	1369.000	6.101	225.745	37.225	229.570	1.188	49.000
1988	38	436.90	1444.000	6.080	231.029	36.963	243.931	1.141	64.000
1989	39	381.30	1521.000	5.944	231.800	35.326	259.191	0.869	81.000
1990	40	383.60	1600.000	5.950	237.984	35.398	275.406	0.880	100.000
1991	41	362.00	1681.000	5.892	241.557	34.711	292.635	0.775	121.000
1992	42	343.70	1764.000	5.840	245.270	34.103	310.942	0.686	144.000
1993	43	359.70	1849.000	5.885	253.067	34.636	330.394	0.764	169.000
1994	44	384.33	1936.000	5.952	261.866	35.420	351.063	0.884	196.000
1995	45	383.91	2025.000	5.950	267.768	35.407	373.025	0.882	225.000
1996	46	388.84	2116.000	5.963	274.306	35.559	396.361	0.906	256.000
1997	47	334.51	2209.000	5.813	273.195	33.787	421.157	0.642	289.000
1998	48	294.16	2304.000	5.684	272.838	32.309	447.504	0.452	324.000
1999	49	279.19	2401.000	5.632	275.963	31.718	475.499	0.385	361.000
2000	50	279.88	2500.000	5.634	281.718	31.746	505.245	0.388	400.000
2001	51	270.88	2601.000	5.602	285.685	31.379	536.853	0.348	441.000
2002	52	307.47	2704.000	5.728	297.876	32.814	570.438	0.514	484.000
2003	53	360.85	2809.000	5.888	312.089	34.674	606.124	0.769	529.000
2004	54	408.18	2916.000	6.012	324.632	36.141	644.042	1.001	576.000
2005	55	442.26	3025.000	6.092	335.054	37.111	684.332	1.167	625.000
2006	56	599.55	3136.000	6.396	358.186	40.911	727.143	1.917	676.000
2007	57	688.98	3249.000	6.535	372.507	42.709	772.632	2.322	729.000
2008	58	870.74	3364.000	6.769	392.622	45.824	820.967	3.090	784.000
2009	59	962.23	3481.000	6.869	405.286	47.187	872.325	3.451	841.000
2010	60	1213.59	3600.000	7.101	426.080	50.429	926.897	4.368	900.000
Σ	1830.000		73810.000	305.698	10318.406	1616.076		84.085	18910.000

FIGURA N° 11. Predicción de cotizaciones del Au años 2011, 2012 y 2013.



En otras palabras se puede afirmar que hay 95% de probabilidades que la cotización anual promedio en 2011 estará entre 427,5064 \$us/O.T. y 2268,9560 \$us/O.T.

LA COTIZACIÓN ANUAL PROMEDIO REAL PARA 2011 fue de 1561,59 \$us/O.T (valor dentro de los límites predichos).

Las cotizaciones reales para los años 2011, 2012 y 2013, estos valores han sido representados también en la Figura N°. 11. **NÓTESE QUE LAS COTIZACIONES REALES SE ENCUENTRAN DENTRO DE**

LOS INTERVALOS DE CONFIABILIDAD OBTENIDOS PARA LAS PREDICCIONES. ESTE HECHO ES IMPORTANTE YA QUE VALIDA EL MODELO; VALE DECIR, QUE EL MODELO SELECCIONADO PERMITE BUENAS PREDICCIONES.

De manera similar se han validado los modelos correspondientes a la Ag, Sn, Pb y Zn, los resultados se muestran en las Figuras N° 12, 13, 15 y 15.

FIGURA N° 12. Predicción de cotizaciones de la Ag años 2011, 2012 y 2013.

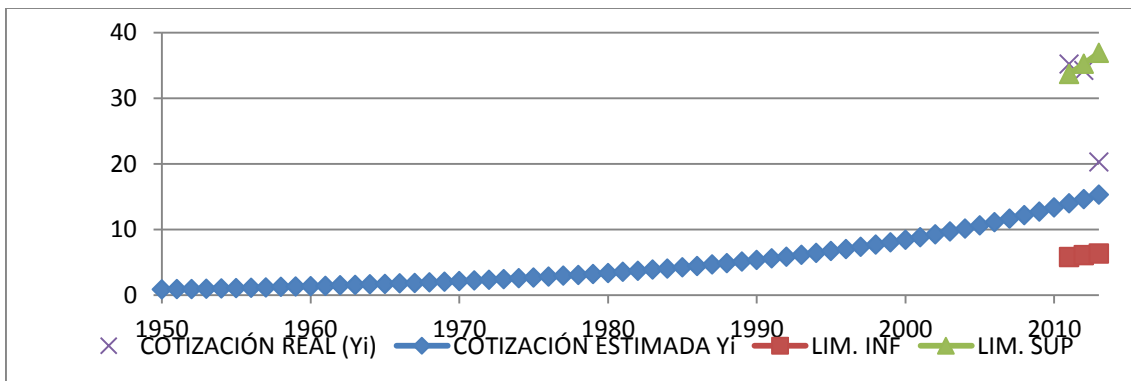


FIGURA N° 13. Predicción de cotizaciones del Sn años 2011, 2012 y 2013.

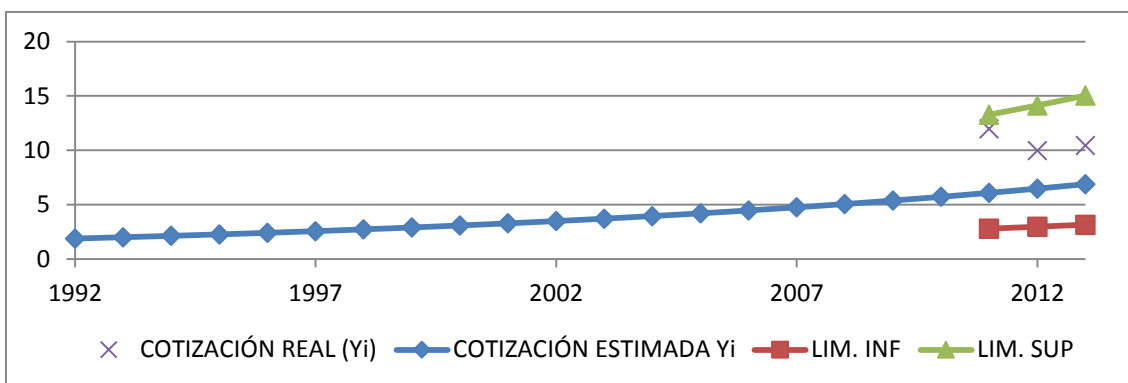


FIGURA N° 14. Predicción de cotizaciones del Pb años 2011, 2012 y 2013.

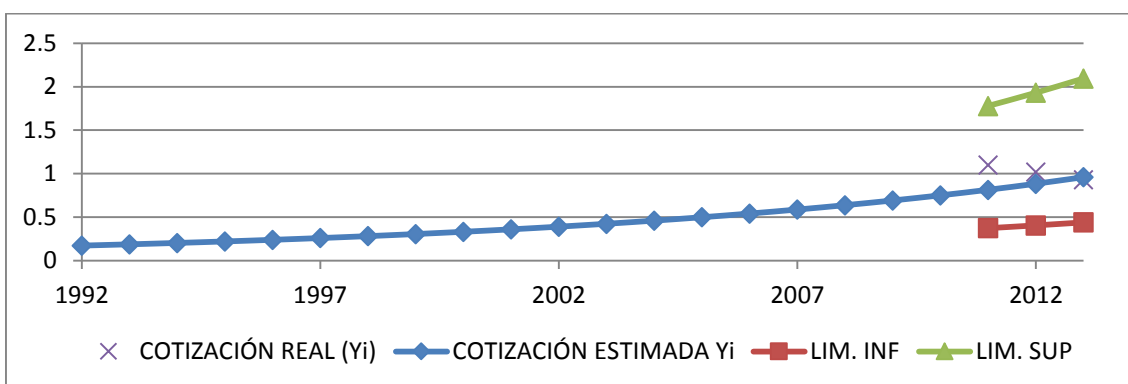
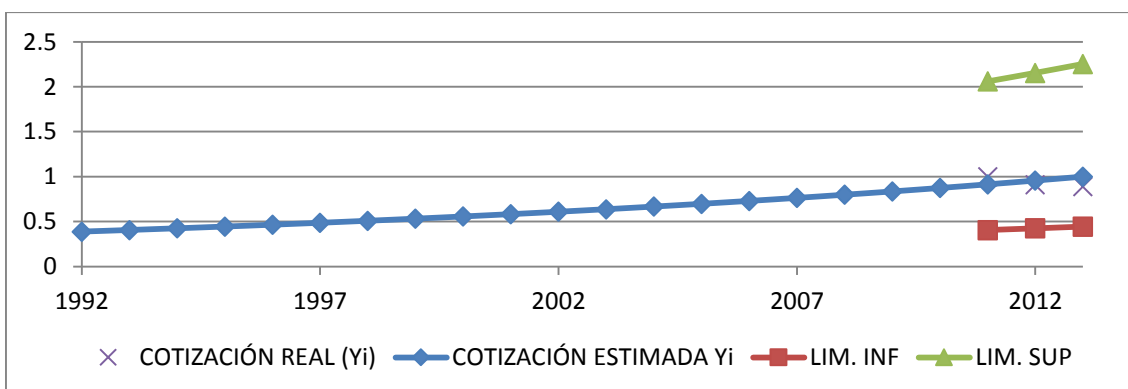


FIGURA N° 15. Predicción de cotizaciones del Zn años 2011, 2012 y 2013.



Nótese que de igual manera en el caso del Sn, Pb y Zn los modelos han sido validados y por tanto útiles para efectuar predicciones; aunque en el caso de la Ag se observa algunas dificultades un valor real está fuera de los intervalos de confiabilidad correspondientes a las predicciones.

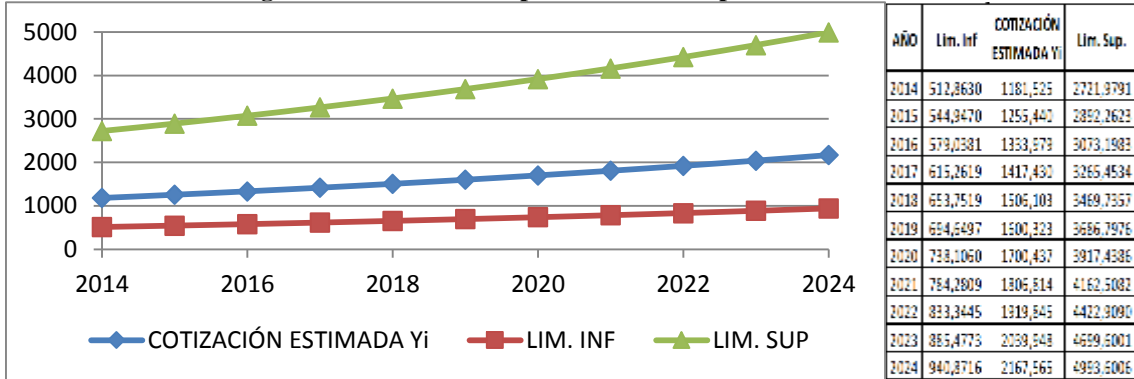
4. PREDICCIÓN DE COTIZACIONES
 Con los modelos validados se ha procedido a efectuar predicciones de las cotizaciones del Au, Ag, Sn, Pb y Zn para el periodo 2014 – 2024.

En el caso del Au, los resultados obtenidos dicen que para el año 2016 el precio del Au será algún valor entre 579,0381 y 3073,1983

\$/O.T con un nivel de confiabilidad del 95%.

Los valores predichos para los restantes años se muestran en la Figura N° 16.

Figura No. 16 Valores predichos del Au periodo 2014 – 2024.



De la misma manera se ha efectuado las predicciones de la cotización Ag, Sn, Pb, Zn

para el periodo 2014 – 2024 los resultados se muestran en las Figuras 17, 18, 19 y 20.

Figura No. 17 Valores predichos del Ag periodo 2014 – 2024.

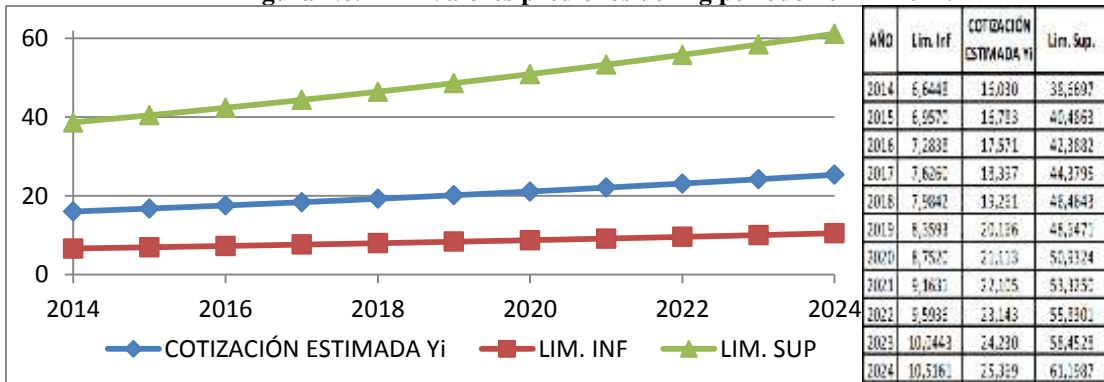


FIGURA No. 18. Valores predichos del Sn periodo 2014 – 2024.

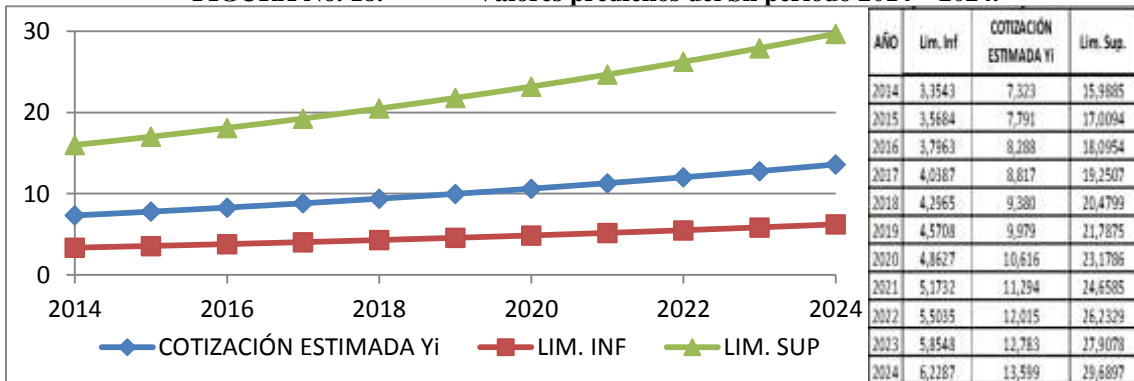


FIGURA No. 19. Valores predichos del Pb periodo 2014 – 2024.

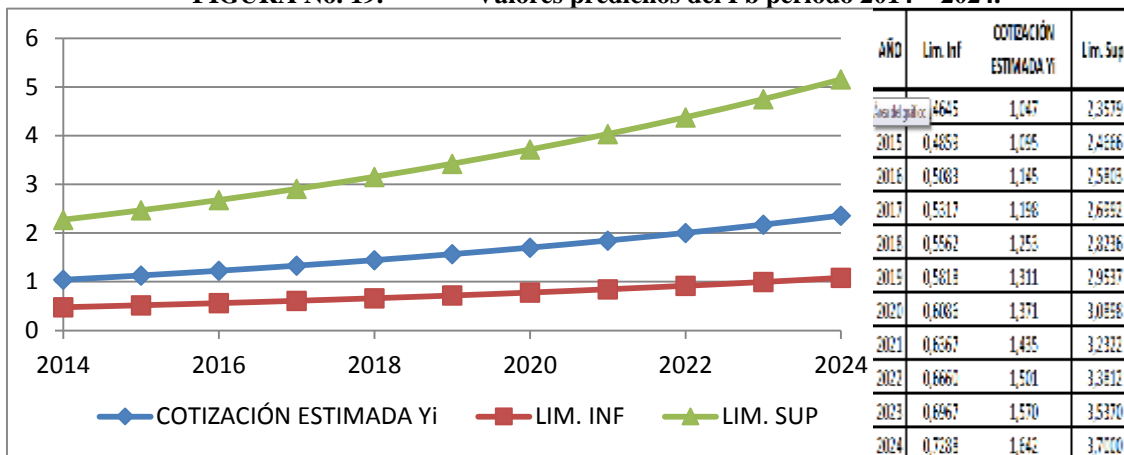
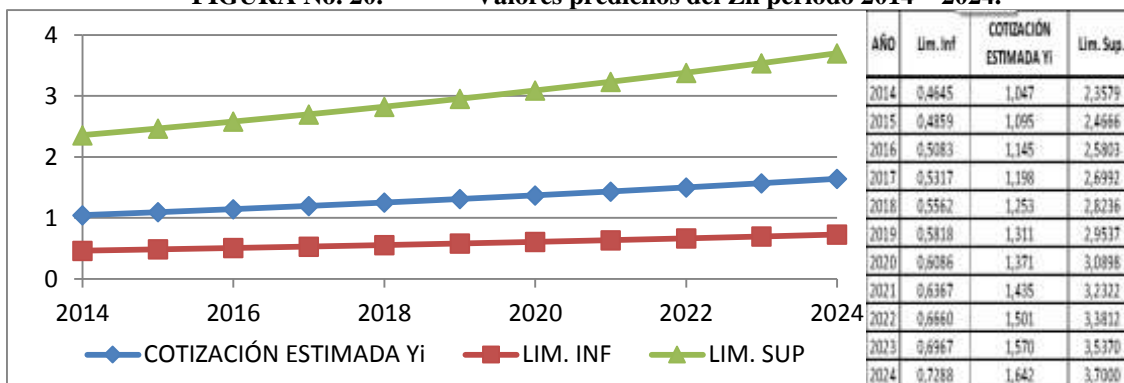


FIGURA No. 20. Valores predichos del Zn periodo 2014 – 2024.



5. CONCLUSIONES.-

El presente trabajo permite ver que el comportamiento y tendencia de las cotizaciones de los minerales considerados puede ser interpretado a través de modelos de regresión sencillos como los utilizados en el presente trabajo.

La disponibilidad de información sobre cotizaciones anuales promedio permite validar los modelos de tendencia ajustados. En el caso de los minerales tratados han sido validados asumiendo que el ajuste de las líneas de tendencia se hubiera efectuado en la gestión 2011. El criterio de validación utilizada responde a que al principio que dicta que un modelo matemático útil es aquel que reproduce información para periodos en los que se tienen datos experimentados. Se ha podido observar que las cotizaciones producidas para el periodo 2011 – 2013 con los modelos coinciden en la mayoría de los

casos con los valores obtenidos para el mismo periodo.

Para la predicción de cotizaciones es importante contar con modelos matemáticos sencillos validados. En el caso presente los modelos estimados para el Au, Ag, Sn, Pb y Zn han sido adecuadamente validados.

Los modelos validados han sido utilizados para predecir con un nivel de confiabilidad del 95% las cotizaciones de los minerales tratados o considerados para el periodo 2014 – 2024 sin embargo como se puede observar en el trabajo los intervalos de confiabilidad de las predicciones son aceptables. Estos intervalos con toda seguridad pueden ser reducidos en el caso del Sn, Pb y Zn para mejorar las predicciones incrementado la información a 30 años o más.

Para tener mejores predicciones se recomienda que los periodos de información conocida sean más grandes. Para los casos tratados (Sn, Pb,

Zn) es recomendable conseguir información de las cotizaciones para periodos desde 1980. Si bien es posible construir modelos de predicción más complejos, modelos que incluyen variables tales como el nivel de producción y el nivel de demanda y otras variables predictivas se ha podido establecer de la bibliografía revisada que estos modelos no ayudan a predecir de mejor manera la cotización de minerales.

De acuerdo a la bibliografía revisada los modelos de predicción utilizados deben ser los más sencillos posibles, deben incluir el menor número posible de variables predictivas. Este trabajo constituye una demostración del principio que señalado. Ha sido posible reflejar comportamientos reales con modelos que incluyen una sola variable predictiva

BIBLIOGRAFÍA. -

Bosch, M. D. (2005). *Estadística Aplicada Básica*.

F, Z. (2004). *Estadística para investigadores*. Editorial Escuela Colombiana de Ingeniería.

G., C. (1988). *Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos*. Mexico: McGraw-Hill.

INE. (1997). *Anuario Estadístico*.

J, C. (2000). *Estadística con SPSS*. Madrid Rama.

J, D. (2008). *Probabilidad y Estadística para ingeniería y ciencias*. Cengage Learning.

R, J. (2012). *Probabilidad y Estadística para ingenieros*. Pearson.

Wackerly, D. D. (2008). *Estadística Matemática con aplicaciones*.

Walope-Myers. (2012). *Probabilidad y Estadística para ingenieros*. Pearson Educación de México, S.A. de C.V. .

Wisniewski P., V. G. (2001). *Problemario de probabilidad*. Thomson Learning.

Artículo recibido en: 26.10.2019

Artículo aceptado: 22.11.2019