

BÚSQUEDA DE MODELOS MATEMÁTICOS PARA LA DETERMINACIÓN DEL ESPACIAMIENTO ÓPTIMO DEL MUESTREO SISTEMÁTICO EN DEPÓSITOS MINERALES TIPO VETA

Rubén Medinaceli Tórrez
r.medinaceli.torrez@gmail.com

RESUMEN

Gran parte de los yacimientos minerales que se explotan en el Departamento de Oruro y en el país son vetiformes; vale decir, son estructuras mineralizadas tabulares aproximadamente verticales con una potencia (ancho) muy reducido respecto a las otras dimensiones.

Los métodos utilizados para la explotación de estos yacimientos son básicamente dos: Corte y Relleno (cut and fill) y rajos de acopio (Shrinkage). Estos métodos para su aplicación exigen la perforación de galerías horizontales (corridas) separadamente entre 30 m y 40 m; y de excavaciones verticales (chimeneas) separadas también entre 30 m y 40 m. las corridas y chimeneas definen unidades de explotación denominadas "blocks" de explotación.

Para la planificación de la explotación del yacimiento es necesario estimar con la mayor confiabilidad posible el contenido promedio (ley media) del mineral de interés de cada uno de los "blocks" de explotación.

Para la estimación de la ley media de los "blocks" de explotación se efectúa un muestreo denominado sistemático en las corridas y las chimeneas. El muestreo sistemático se refiere a excavar pequeñas canaletas perpendiculares a la dirección del yacimiento mineralizado tanto en los techos de las corridas como en una de las paredes de las chimeneas. El material obtenido en cada canaleta es embolsado y enviado a un laboratorio de análisis químico para la determinación del contenido mineralógico (ley) del mineral de interés.

El muestreo sistemático de un yacimiento mineralizado y el procesamiento de las muestras en un laboratorio de análisis químico forman parte de los costos de explotación de yacimientos; este componente en el costo de explotación puede ser alto o bajo dependiendo fundamentalmente del número de muestras obtenidas.

En la actualidad, las canaletas de muestreo tanto en las corridas como en las chimeneas son excavadas cada dos (2) metros, sin tomar en cuenta en absoluto el mineral de interés, el tipo de mineralización, la precisión del muestreo y los costos asociados.

La pregunta permanente es ¿Por qué muestras de cada dos (2) metros?

El presente proyecto, pretende identificar o en su caso desarrollar modelos matemáticos que permiten definir el espaciamiento óptimo entre muestras para el muestreo sistemático en yacimientos minerales tipo veta. Óptimo en el sentido de lograr el mayor conocimiento posible del yacimiento mineralizado al menor costo. El o los modelos matemáticos obtenidos serán aplicados a un caso específico (una veta en algún yacimiento en el que se puedan conseguir datos).

PALABRAS CLAVE: Muestreo sistemático de depósitos, modelos matemáticos aplicados a yacimientos

ABSTRACT.

A large part of the mineral deposits that are exploited in the Department of Oruro and in the country are vetiform; that is to say, they are approximately vertical tabular mineralized structures with a power (width) very reduced with respect to the other dimensions.

The methods used for the exploitation of these deposits are basically two: Cut and fill and cuttings (Shrinkage). These methods for its application require the perforation of horizontal galleries (runs) separately between 30 m and 40 m; and of vertical excavations (chimneys) also separated between 30 m and 40 m. Runs and chimneys define exploitation units called "blocks" of exploitation.

For the planning of the exploitation of the deposit, it is necessary to estimate with the highest possible reliability the average content (average grade) of the mineral of interest of each one of the exploitation blocks.

For the estimation of the average grade of the "blocks" of exploitation a systematic sampling is carried out in the runs and chimneys. Systematic sampling refers to excavating small channels perpendicular to the direction of the mineralized deposit both in the ceilings of the runs and in one of the walls of the chimneys. The material obtained in each channel is bagged and sent to a chemical analysis laboratory for the determination of the mineralogical content (law) of the mineral of interest.

The systematic sampling of a mineralized deposit and the processing of the samples in a chemical analysis laboratory are part of the costs of exploitation of deposits; this component in the cost of exploitation can be high or low depending mainly on the number of samples obtained.

At present, the sampling channels in both runs and chimneys are excavated every two (2) meters, without taking into account at all the mineral of interest, the type of mineralization, the precision of the sampling and the associated costs.

The permanent question is Why do you sample every two (2) meters?

The present project aims to identify or, where appropriate, develop mathematical models that allow to define the optimal spacing between samples for systematic sampling in vein-type mineral deposits. Optimal in the sense of achieving the greatest possible knowledge of the mineralized deposit at the lowest cost. The mathematical model (s) obtained will be applied to a specific case (a vein in a deposit in which data can be obtained).

KEY WORDS: Systematic sampling of deposits, mathematical models applied to mineral deposits

INTRODUCCIÓN.

Para planificar la explotación de un yacimiento mineral es absolutamente necesario contar con la mejor estimación posible del mismo; vale decir, tener el mejor conocimiento posible del yacimiento en términos de su forma, ubicación respecto a la superficie, volumen, tonelaje y fundamentalmente la distribución espacial de contenidos mineralógicos (leyes) en el yacimiento; saber dónde se encuentran las zonas ricas y las zonas de bajo contenido mineralógico.

La evaluación de un yacimiento mineral requiere información obtenida a partir de muestras tomadas del yacimiento, las cuales son escasas en las etapas de prospección y exploración, de mayor número en la etapa de perforación de desarrollo y abundantes durante la explotación. Sin embargo, aun cuando el número de muestras disponibles sea abundante, el volumen de todas las muestras resulta siempre insignificante comparado con el volumen del yacimiento; por ello, la evaluación de un yacimiento mineral en la mayoría de los casos un emprendimiento difícil.

En el país, la mayoría de los yacimientos minerales explotados y en explotación son vetiformes; es decir, tienen una forma tabular con potencias pequeñas y buzamientos casi verticales.

Para la planificación de la explotación a corto y mediano plazo de estos yacimientos, se procede a un muestreo sistemático de la veta. Para el efecto es necesario excavar galerías horizontales a lo largo de la veta (corridas) ubicadas en diferentes niveles. Aprovechando estas galerías, se toman muestras provenientes de pequeñas canaletas excavadas en el techo con una dirección normal al plano de la veta. Las preguntas que surgen inmediatamente son: **¿Cuánto debería ser la distancia vertical entre las galerías de muestreo? Y ¿Cuánto debe ser la distancia de separación entre las canaletas de muestreo?**

Estas distancias dependen de la precisión y el nivel de confiabilidad deseables en las estimaciones a efectuarse, de la continuidad de la mineralización, de los costos asociados al muestreo obviamente del presupuesto disponible para este efecto.

La aplicación de algunos conceptos básicos del formalismo matemático de las funciones aleatorias o geoestadística permite dar respuestas satisfactorias a las preguntas anunciadas.

La mayoría de las variables relacionadas con fenómenos naturales pueden ser exitosamente descritas mediante una variable regionalizada. Una variable regionalizada es simplemente una variable distribuida en el espacio y matemáticamente en una función $f(x)$ que toma un valor en cada punto x de un espacio tridimensional. Una variable regionalizada posee dos características aparentemente contradictorias; presenta un comportamiento local aleatorio errático que trae a la mente el concepto de variable aleatoria, pero además presenta un comportamiento general estructural. Un yacimiento mineral (o mineralización) es un fenómeno natural. La distribución de contenidos mineralógicos (leyes) en un yacimiento puede ser satisfactoriamente representada por una variable regionalizada. Un yacimiento mineralizado, presente una estructura que gobierna la distribución de contenidos mineralógicos y define zonas de alto contenido mineralógico y zonas de bajo contenido mineralógico; a su vez esta estructura es afectada por un comportamiento local aleatorio y errático de las leyes.

En el marco de algunos supuestos de estacionalidad zonal, la interpretación probabilística proporcionada por el formalismo matemático de las funciones aleatorias toma en cuenta las dos características de una variable regionalizada; aleatoriedad y estructura; y proporciona una representación simple de la variabilidad espacial y conduce a un enfoque consistente y operacional para la solución de

problemas de inferencia y estimación. Este formalismo a través de la función variograma permite modelar adecuadamente características importantes de la distribución espacial de las leyes u otras variables en un yacimiento mineral para su adecuada estimación; presenta herramientas importantes asociadas al proceso de estimación tales como la varianza de estimación, la varianza de dispersión, el kriging, la simulación condicional y otras. Este trabajo muestra una aplicación importante de la varianza de estimación.

OBJETIVOS GENERAL Y ESPECÍFICOS.

Disminuir los costos de muestreo relacionados con la explotación de yacimientos mineralizados tipo veta.

- Inventariar modelos matemáticos relacionados con la determinación del espaciamiento óptimo entre muestras en el muestreo sistemático de yacimientos minerales.
- Adoptar modelos matemáticos aplicables a la determinación del espaciamiento óptimo entre muestras en el muestreo sistemático de yacimientos minerales tipo veta.
- Aplicar el o los modelos matemáticos obtenidos a una cas específico.

INGENIERÍA DEL PROYECTO.

Dado un presupuesto para el muestreo de una veta, ¿Cuál es la configuración del muestreo (... distancia entre las galerías de muestreo y distancia enter las canaletas de muestero en la galería...) para lograr la mejor estimación posible de este yacimiento mineral?

Como criterio de evaluación corresponde aclarar que la mejor estimación es aquella para la cual la varianza del error de estimación en mínima.

El siguiente gráfico ilustra parte de la notación a ser utilizada.

ILUSTRACIÓN NO. 1 PLANO DE LA VETA.

CONSTRUCCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO.

La varianza del error de estimación total en este caso presenta dos componentes: el término lineal referido al error que se comete al extender la ley de una canaleta a la longitud de galería l ; y el término tajada referido al error que se comete al extender la ley de una galería al área $L \times h$.

Estos componentes son sumables. Esto es:

$$\sigma_{\varepsilon}^2(\text{global}) = \frac{\sigma_{\varepsilon}^2(0, l)}{N_c} + \frac{\sigma_{\varepsilon}^2(L, h)}{n_q}$$

Dónde:

$$N_c = \text{Número de canaletas} = \frac{HL}{hl}$$

$$n_q = \text{Número de galerías} = \frac{H}{h}$$

$\sigma_{\varepsilon}^2(0, l)$ – (término línea)

$\sigma_{\varepsilon}^2(L, h)$ – (término tajada)

Esto es:

$$\sigma_{\varepsilon}^2(\text{global}) = \frac{\sigma_{\varepsilon}^2(0, l)}{HL} + \frac{h * \sigma_{\varepsilon}^2(L, h)}{H}$$

Por otro lado, si el presupuesto asignado para el muestreo de una veta es igual a P_0 , se tiene que:

$$P(h, l) = \frac{H}{h} LP_G + \frac{HL}{hl} P_s = P_0$$

$$P(h, l) = \frac{HLP_G}{h} \left(1 + \frac{w}{l}\right) = P_0; w = \frac{P_s}{P_G}$$

Dónde:

P_G

= Costo de un (1)metro de galería de muestreo.

P_s = Costo de una canaleta de muestreo.

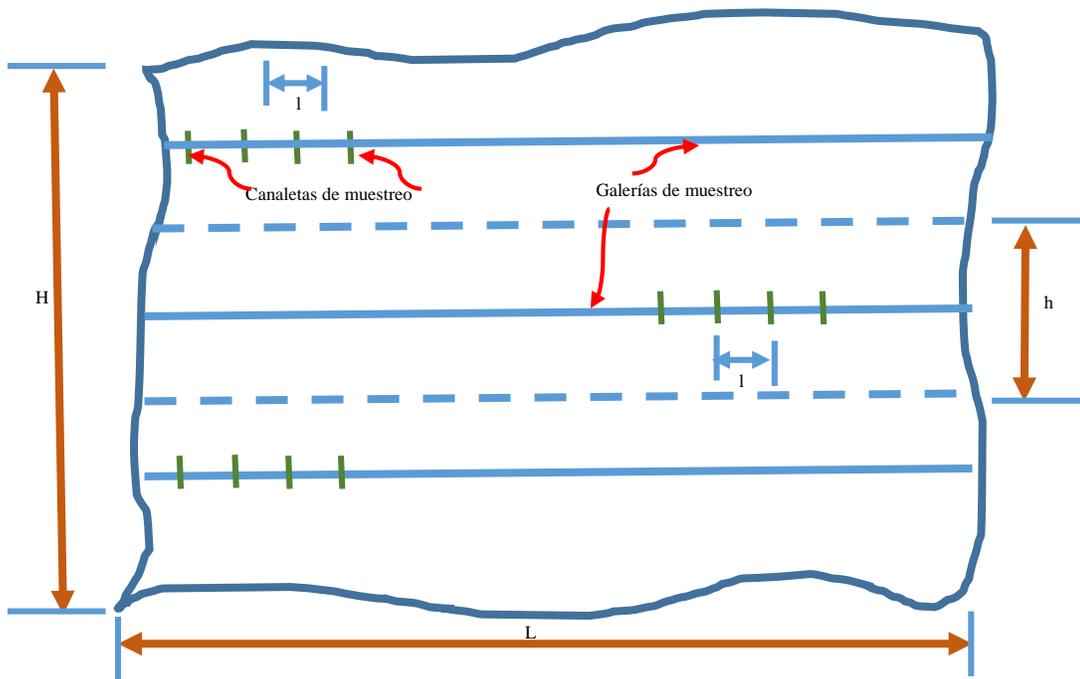
En consecuencia el problema formulado puede matemáticamente plantearse de la siguiente manera:

Minimizar:

$$\sigma_{\varepsilon}^2(\text{global}) = \frac{\sigma_{\varepsilon}^2(0, l)}{HL} + \frac{h * \sigma_{\varepsilon}^2(L, h)}{H}$$

Sujeto a:

$$P(h, l) = \frac{HLP_G}{h} \left(1 + \frac{w}{l}\right) = P_0$$



H = Altura de la veta; h = Distancia entre galerías de muestreo
 L = Longitud de veta; l = Distancia entre canaletas de muestreo

SOLUCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO.

Para la solución del modelo se sugiere utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange. Este método plantea definir inicialmente la función de Lagrange F , la misma que para el presente caso viene dada por:

$$F = \sigma_{\varepsilon}^2(\text{global}) - \lambda [P(h, l) - P_0]$$

$$F = \frac{hl\sigma_{\varepsilon}^2(0, l)}{HL} + \frac{h * \sigma_{\varepsilon}^2(L, h)}{H}$$

$$+ \lambda \left[\frac{HLP_G}{h} \left(1 + \frac{w}{l} \right) + P_0 \right]$$

Dónde:

λ = Multiplicador de Lagrange

El método señala que esta función debe ser derivada parcialmente con respecto a cada una de las incógnitas (l, h y λ). Cada derivada parcial se iguala a 0 (cero) y de esta manera se tiene un sistema de 3 (tres) ecuaciones den 3 (tres) incógnitas; vale decir:

$$\frac{\partial F}{\partial l} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial h} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$$

Esto es:

$$\frac{\partial F}{\partial l} = \frac{h}{HL} \frac{\partial}{\partial l} [l\sigma_{\varepsilon}^2(0, l)] + \lambda HLP_G \frac{w}{hl^2} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial h} = \frac{[l\sigma_{\varepsilon}^2(0, l)]}{HL} + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial h} [h\sigma_{\varepsilon}^2(L, h)]$$

$$+ \frac{\lambda HLP_G}{h^2} \left(1 + \frac{w}{l} \right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{HLP_G}{h} \left(1 + \frac{w}{l} \right) - P_0 = 0$$

Esta es la solución

APLICACIÓN DEL MODELO

Problema:

Dada la siguiente información relacionada con un veta:

$$L = 300 \text{ m}; \quad H = 100 \text{ m}; \quad P_s = 5,00 \text{ \$us}; \quad P_g = 250 \text{ \$us/metro}; \quad P_0 = 300\,000 \text{ \$us}$$

Variograma: Esférico con alcance (a) = 40 metros, efecto de pepita (C_0) = 3,00 y meseta (C) = 3,00.

Estimar la distancia de separación entre las galerías de muestreo (h) y la distancia de separación entre canaletas de muestreo (l).

Solución:

Se utilizarán las siguientes equivalencias:

$$f(l) = \sigma_{\varepsilon}^2(0, l); \quad f'(l) = \frac{\partial}{\partial l} (l\sigma_{\varepsilon}^2(0, l))$$

$$g(h) = \sigma_{\varepsilon}^2(L, h); \quad g'(h) = \frac{\partial}{\partial l} (h\sigma_{\varepsilon}^2(L, h))$$

Se sabe que los valores de $\sigma_{\varepsilon}^2(0, l)$ y $\sigma_{\varepsilon}^2(L, h)$ pueden obtenerse a partir de las siguientes expresiones:

$$\sigma_{\varepsilon}^2(0, l) = 2\Gamma(0, l) - \Gamma(0; 0) - \Gamma(l; l)$$

Dónde:

$$\Gamma(0, l)$$

= Variogramapromedio del punto 0 con la recta l.

$$\Gamma(0; 0)$$

= Variograma promedio del punto 0 con el punto 0.

$$\Gamma(l; l)$$

= Varograma promedio de la recta l con la recta l.

$$\sigma_{\varepsilon}^2(L, h) = 2\Gamma(L; Lxh) - \Gamma(L; L) - \Gamma(Lxh; Lxh)$$

Dónde:

$$\Gamma(L; Lxh)$$

= Variograma promedio de la galería L con el área Lxh.

$$\Gamma(L; L)$$

= Variograma promedio de la galería L con la galería L.

$$\Gamma(Lxh; Lxh)$$

= Variograma promedio del área Lxh con el área Lxh.

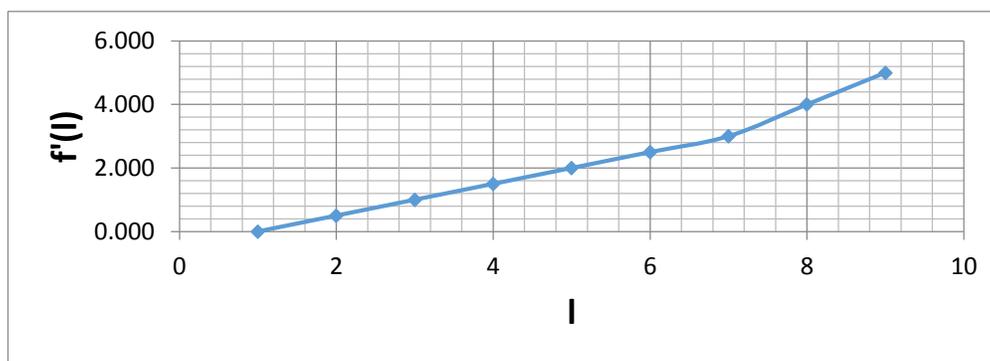
Los variogramas promedios son calculados fácilmente recurriendo a una integración numérica. En su caso, tal como ocurre en el presente caso $\sigma_{\varepsilon}^2(0, l)$ y $\sigma_{\varepsilon}^2(L, h)$ pueden calcularse utilizando ábacos como los proporcionados en las páginas 131 y 132 del libro "MINING GEOSTATISTICS" de A. G. Journel y Ch.J. Huijbregts.

En la siguiente tabla se procede a calcular $\sigma_{\varepsilon}^2(0, l)$, $f(l)$ y $f'(l)$. Esta última derivada se evalúa gráficamente.

TABLA No. 1 Cálculo de $\sigma_{\varepsilon}^2(0, l)$, $f(l)$ y $f'(l)$.

l	0,000	0,500	1,000	1,500	2,000	2,500	3,000	4,000	5,000
l/a	0,000	0,013	0,025	0,038	0,050	0,063	0,075	0,100	0,125
A	0,000	0,003	0,006	0,010	0,013	0,017	0,020	0,025	0,032
$\sigma_{\varepsilon}^2(0, l)$	0,000	3,009	3,018	3,028	3,039	3,051	3,060	3,075	3,096
$f(l)$	0,000	1,504	3,018	4,542	6,078	7,627	9,180	12,300	15,480
$f'(l)$	3,008	3,028	3,048	3,072	3,098	3,106	3,120	3,180	3,240

ILUSTRACIÓN No. 2 Última derivada evaluada gráficamente.



$$a = \text{Rango del variograma} = 40$$

A

= Valor leído en el ábaco correspondiente.

$$\sigma_{\varepsilon}^2(0, l) = C_0 + C(A) = 3,0 + 3,0(A)$$

$$f'(l) = \frac{f(l_j) - f(l_i)}{l_j - l_i}$$

A partir de los valores obtenidos en la tabla se puede ver que en promedio:

$$f'(l) = 3,100$$

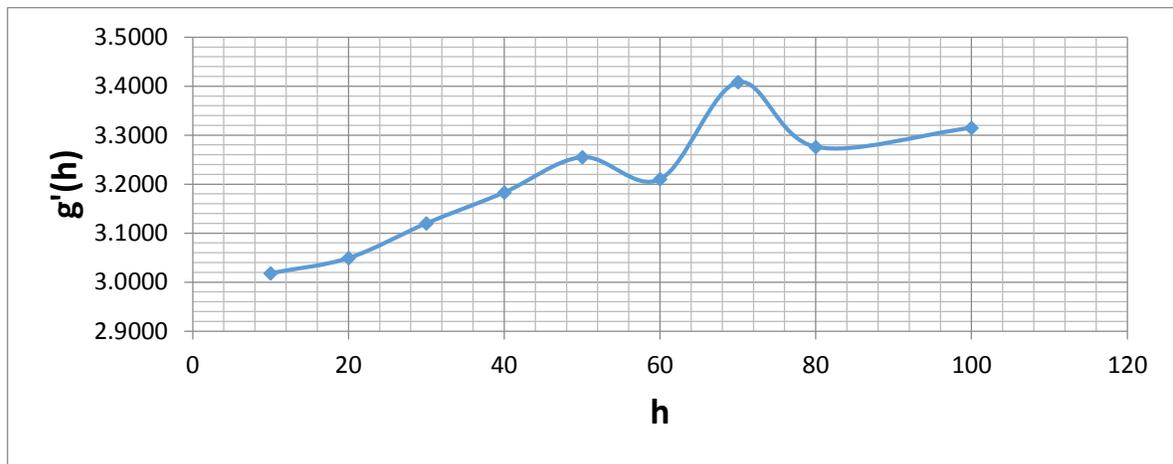
$$\sigma_{\varepsilon}^2(0, l) = 3,058$$

De igual manera, en la siguiente tabla se procede a calcular $\sigma_{\varepsilon}^2(L, h)$, $g(h)$ y $g'(h)$. Esta última derivada se evalúa gráficamente.

TABLA No. 2 Cálculo de $\sigma_{\varepsilon}^2(L, h)$, $g(h)$ y $g'(h)$.

h	10	20	30	40	50	60	70	80	100
h/a	0,2500	0,5000	0,7500	1,0000	1,2500	1,5000	1,7500	2,0000	2,5000
A	0,0017	0,0039	0,0080	0,0160	0,0250	0,0350	0,0400	0,0520	0,0600
$\sigma_{\varepsilon}^2(L, h)$	3,0051	3,0117	3,0240	3,0480	3,0750	3,1050	3,1200	3,1560	3,1800
$g(h)$	30,0510	60,2340	90,7200	121,9200	153,7500	186,3000	218,4000	252,4800	318,0000
$g'(h)$	3,0180	3,0490	3,1200	3,1830	3,2550	3,2100	3,4080	3,2760	3,3150

ILUSTRACIÓN No. 3 Última derivada evaluada gráficamente.



$a = \text{Rango del variograma} = 40$

A
= Valor leído en el ábaco correspondiente.

$$\sigma_{\varepsilon}^2(L, h) = C_0 + C(A) = 3,0 + 3,0(A)$$

$$g(l) = \frac{g(h_j) - g(h_i)}{h_j - h_i}$$

A partir de los valores obtenidos en la tabla se puede ver que en promedio:

$$g'(l) = 3,204$$

Reemplazando los valores dados y los valores obtenidos en el siguiente sistema de ecuaciones, se tiene:

$$\frac{\partial F}{\partial l} = \frac{h}{HL} \frac{\partial}{\partial l} [l\sigma_{\varepsilon}^2(0, l)] + \lambda HLP_G \frac{w}{hl^2} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial h} = \frac{[l\sigma_{\varepsilon}^2(0, l)]}{HL} + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial h} [h\sigma_{\varepsilon}^2(L, h)] + \frac{\lambda HLP_G}{h^2} \left(1 + \frac{w}{l}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{HLP_G}{h} \left(1 + \frac{w}{l}\right) - P_0 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial l} = \frac{h}{HL} f'(l) + \lambda HLP_G \frac{w}{hl^2} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial h} = \frac{f(l)}{HL} + \frac{1}{H} g'(h) + \frac{\lambda HLP_G}{h^2} \left(1 + \frac{w}{l}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{HLP_G}{h} \left(1 + \frac{w}{l}\right) - P_0 = 0$$

$$h \frac{3,100}{30\,000} + \frac{150\,000\lambda}{hl^2} = 0$$

$$l \frac{3,058}{30\,000} + 0,01(3,204)$$

$$+ 7\,500\,000 \left(1 + \frac{0,02}{l}\right) \frac{\lambda}{h^2} = 0$$

$$\frac{7\,500\,000}{h} + \left(1 + \frac{0,02}{l}\right) - 300\,000 = 0$$

$$0,000103h + 150\,000 \frac{\lambda}{hl^2}$$

$$= 0 \tag{1}$$

$$0,000102 l + 0,032 + 7 500 000 \frac{\lambda}{h^2} + 150 000 \frac{\lambda}{hl^2} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{7 500 000}{h} + \frac{150 000}{hl} - 300 000 = 0 \quad (3)$$

De 1:

$$150 000 \frac{\lambda}{hl^2} = -0,000103h$$

$$\lambda = -\frac{0,000103}{150 000} h^2 l^2$$

$$\lambda = -0,00000000687 h^2 l^2$$

En 2:

$$0,000102 l + 0,032 + 7 500 000 \frac{-0,00000000687 h^2 l^2}{h^2} + 150 000 \frac{-0,00000000687 h^2 l^2}{hl^2} = 0$$

$$0,000102 l + 0,032 - 0,00515 l^2 - 0,000102 l = 0$$

$$-0,00515 l^2 = -0,032$$

$$l^2 = 6,2136$$

$$l = 2,49 \approx 2,50$$

CONCLUSIONES.

- Tal como se puede apreciar es posible estimar la distancia vertical entre galerías de muestreo y la distancia horizontal entre las canaletas de muestreo para lograr la mejor estimación posible de una veta. Para ello, es necesario tener datos referidos a las dimensiones de la veta, los costos de muestreo, el presupuesto asignado para el muestreo y una estimación del variograma del mineral de interés en la veta.

BIBLIOGRAFÍA.

- Journel A.G y Huijbregts Ch. J., Mining Geostatistics, New York, Academic Press Inc, 1981.
- Michel David, Geostatistical Ore Reserve Estimation, New York, Elsevier Scientific Publishing Company, 1979.
- Dean A, Voss D (1999) "Design and Analysis of Experiments". New York: Springer.
- Deming WE (1964) "Statistical Adjustment of Data". New York: Dover Publications.

En 3:

$$\frac{7 500 000}{h} + \frac{150 000}{h * 2,50} - 300 000 = 0$$

$$\frac{18 750 000 + 150 000}{2,5 * h} = 300 000$$

$$\frac{18 900 000}{300 000} = 2,5h$$

$$h = 25,2 \approx 25,00$$

PRUEBA:

$$N_c = \text{Número de canaletas} = \frac{HL}{hl}$$

$$N_c = \frac{100 * 300}{25,2 * 2,49}$$

$$N_c = 478 \text{ CANALETAS}$$

$$\text{COSTO GALERIAS} = 300 * 3,968 * 250 = 297 600 \text{ \$US}$$

$$n_q = \text{Número de galerías} = \frac{H}{h}$$

$$n_q = \frac{100}{25,2}$$

$$n_q = 3,968 \text{ GALERIAS}$$

$$\text{COSTO CANALETAS} = 478 * 5 = 2 390 \text{ \$US}$$

$$\text{COSTO TOTAL}(\$US) = 299 990$$

- El trabajo desarrollado muestra la gran contribución del formalismo matemático de las funciones aleatorias a problemas de estimación de recursos y reservas minerales, recurrir a este formalismo evita el uso de criterios meramente empíricos y lógicamente imprecisos como ocurre en varias operaciones mineras en el país.

- Emery X (2000) "Geoestadística lineal", Santiago: Depto de Ing. de Minas, U. de Chile.
- Green JR, Margerison D (1978) "Statistical Treatment of Experimental Data". Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Company.
- Lapin LL (1998) "Probability and statistics for modern engineering", 2nd edition. Waveland Press.