

## **DISEÑO DE UN CONTROLADOR DIFUSO TIPO-2 T2FC MEDIANTE LA ESTABILIDAD DE LYAPUNOV EN EL P.E.A. CON UNA EVALUACIÓN COMPARATIVA PARA EL CONTROL DE NIVEL DE TANQUES DE AGUA CON TIEMPO MUERTO FOPDT**

**Bustillos Durán, Vidher Wilfredo**  
**vwbustillos@umsa.bo , vidher.bustillos@gmail.com**  
**Universidad Mayor de San Andrés**  
**La Paz, Bolivia**

### **Resumen**

Este artículo presenta el diseño de un controlador difuso tipo-2 T2FC, el cual se basa en la estabilidad de Lyapunov y su función candidata para obtener las reglas base de control, para el diseño del controlador difuso tipo-2, en base a las reglas difusas establecidas por el funcionamiento del sistema de control, se utiliza de manera exclusiva las señales del error y la derivada del error, determinando las funciones de membresía tipo-2 que permita realizar el seguimiento a un nivel de referencia – set point establecido, el cual permitirá la evaluación comparativa de sistemas de control difuso para el control de nivel de tanques de agua dentro del P.E.A.

El desarrollo del controlador difuso tipo-2 T2FC, se lo realizará utilizando el software de modelaje matemático MatLab 2015b con su aplicación Simulink y la librería Fuzzy Logic Type2, resaltando en el main editor, el tipo de reducción por el método de Karnik-Mendel KM, las variables difusas del sistema de inferencia FIS y el método de inferencia de Sugeno para la presentación de la variable de salida.

Para la validación de los resultados, se utiliza un sistema de control de nivel de tanques de agua con tiempo muerto, mediante una maqueta virtual obtenida del software Control Station v3.7®, analizando el régimen transitorio, comparando los resultados obtenidos con los controladores difusos T2FC y T1FC.

**Palabras Clave:** Controlador difuso, T2FC, método de reducción KM, funciones de membresía, reglas difusas, inferencia de Sugeno, estabilidad de Lyapunov.

### **Abstract**

This article presents the design of a type-2 T2FC fuzzy controller, which is based on the Lyapunov stability and its candidate function to obtain the base control rules, for the design of the type-2 fuzzy controller, based on the rules fuzzy signals established by the operation of the control system, the error signals and the derivative of the error are used exclusively, determining the type-2 membership functions that allow tracking at a reference level – established set point, which will allow the comparative evaluation of fuzzy control systems for the level control of water tanks within the P.E.A.

The development of the T2FC type-2 fuzzy controller will be carried out using the MatLab 2015b mathematical modeling software with its Simulink application and the Fuzzy Logic Type2 library, highlighting in the main editor, the type of reduction by the Karnik-Mendel KM method. , the fuzzy variables of the FIS inference system and the Sugeno inference method for the presentation of the output variable.

For the validation of the results, a water tank level control system with dead time is used, through a virtual model obtained from the Control Station v3.7® software, analyzing the transitory regime, comparing the results obtained with the fuzzy controllers. T2FC and T1FC.

**Keywords:** Fuzzy controller, T2FC, KM reduction method, membership functions, fuzzy rules, Sugeno inference, Lyapunov stability.

## 1. Introducción

En la actualidad se tiene dos tipos de controladores difusos tipo-1 T1FC y el tipo-2 T2FC, siendo el primero la base de investigación del controlador difuso tipo-2, los T1FC pueden ingresar en inestabilidades cuando se presentan dispersión en las mediciones o prolongación del tiempo de respuesta, en este sentido nacen los T2FC los cuales pueden manejar la incertidumbre, son más estables y presentan una respuesta más rápida dentro el régimen transitorio y pueden modelar sistemas complejos no lineales de manera experimental, obteniendo un mejor desempeño al momento de diseñarlos con herramienta adecuadas.

Para el diseño y desarrollo del controlador difuso tipo-2, se utiliza la metodología de Buchanan y sus cinco fases para la construcción de un sistema experto, el método de inferencia de Takagi Sugeno Kang – TSK, denominado simplemente como método de Sugeno proporcionado por y la librería Fuzzy Logic Type2 de MatLab 2015b utilizado para el desarrollo de este tipo de controladores difuso tipo-2 T2FC.

## 2. bases teóricas

### A) Los conjuntos difusos tipo-2

En base a la investigación realizada por [1] Zadeh introdujo por primera vez el concepto de “conjuntos difusos con funciones de membresía difusas” en 1995, indicando lo siguiente “*los conjuntos difusos tipo-2, están motivados por la estrecha asociación que existe entre el concepto de verdad lingüística con valores de verdad, en los que los grados de membresía se especifican en términos lingüísticos*” a la cual se considera como la primera noción de un conjunto difuso de tipo n.

Para definir un conjunto difuso tipo-2, nos basamos en la definición realizada por Lofti y Zadeh, representada en la investigación realizada por Rodriguez [2], los conjuntos difusos tipo-2 de intervalo IT2FS<sup>1</sup> es expresado por dos funciones de pertenencia, una representa el grado de pertenencia en  $X$  y la segunda agrega una ponderación a cada conjunto difuso tipo-1.

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) / x \in X\} \quad (1)$$

1. IT2FS = INTERVAL TYPE-2 FUZZY SET

Analizando el conjunto difuso primario está ponderado por el conjunto difuso como una función de pertenencia secundaria.

$$\tilde{A} = \{((x, u), J_x, f_x(u)) / x \in X; u \in [0,1]\} \quad (2)$$

Si solo si:  $f_x(u) = 1$

Una aclaración que realiza Jerry Mendel, extraído de Durán [3] indica lo siguiente:

$$\tilde{A} = \{((x, u), \mu_{\tilde{A}}(x, u)) / \forall x \in X; \forall u \in J_x \subseteq [0,1]\} \quad (3)$$

Donde:

$$0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x, u) \leq 1$$

Otra forma de expresar el conjunto difuso  $\tilde{A}$  es:

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \int_{u \in J_x} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x, u)}{x, u} \quad J_x \subseteq [0,1] \quad (4)$$

Donde:  $\int$  muestra la unión sobre las entradas  $x$  y  $u$

Haciendo un análisis a la ecuación 4, se debe tomar en cuenta algunas restricciones al momento de considerarlas:

- $\forall u \in J_x \subseteq [0,1]$ , debe ser consistente con la restricción de un conjunto difuso tipo-2,  $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x, u) \leq 1$ , donde al desaparecer la incertidumbre una función de membresía tipo-2, se reducirá a una función de membresía tipo-1.
- $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x, u) \leq 1$ , una función de membresía debe tomar valores entre 0 y 1, cuando todas las  $\mu_{\tilde{A}}(x, u) = 1$ , entonces el conjunto de  $\tilde{A}$  es llamado conjunto difuso tipo-2 en intervalos o IT2FS, según [4].

### B) La huella de incertidumbre “FOU”

La huella de incertidumbre FOU<sup>2</sup> de un conjunto difuso tipo-2, llega a definir la incertidumbre

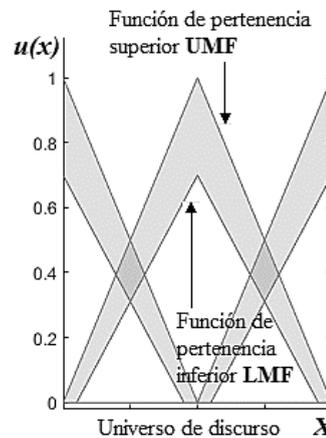
de como la unión de todas las pertenencias del conjunto difuso primario

$$FOU(\tilde{A}) = \bigcup_{x \in X} J_x \quad (5)$$

Esta huella de incertidumbre, se encuentra limitada por dos funciones de pertenencia, una denominada función de pertenencia superior UMF<sup>3</sup>  $\overline{\mu_{\tilde{A}}}(x)$  y la otra función de pertenencia inferior LMF<sup>4</sup>  $\underline{\mu_{\tilde{A}}}(x)$ , ambos son conjuntos difusos tipo-1, por lo que el grado de pertenencia de cada elemento de un IT2FS es un intervalo de:  $[\underline{\mu_{\tilde{A}}}(x), \overline{\mu_{\tilde{A}}}(x)]$ .

La figura 1 representa la ecuación 5 mostrando la huella de incertidumbre generada por las funciones de pertenencia superior e inferior.

**Figura 1: Representación de las funciones de pertenencia superior e inferior de la FOU**



Fuente: Elaboración propia

Para obtener información de las funciones de pertenencia o membresía, en los conjuntos difusos tipo-1, se puede recurrir al método del

2. FOU = Footprint of Uncertainty  
 3. UMF = Upper Membership Function  
 4. LMF = Lower Membership Function

centroide, de la misma forma se puede obtener información de la huella de incertidumbre de los conjuntos difusos tipo-2 de  $\tilde{A}$ .

$$C(\tilde{A}) = \frac{1}{[C_l(\tilde{A}); C_u(\tilde{A})]} = \frac{1}{[C_l; C_u]} \quad (6)$$

Donde:

$C_l$  = cota inferior del centroide  
 $C_u$  = cota superior del centroide

Tomando en cuenta que conjuntos difusos tipo-2 de intervalo, presentan una cantidad infinita de centroides incrustados en una huella de incertidumbre, estos centroides se pueden calcular generalizando la ecuación 6, donde el cálculo de los centroides de la cota inferior como de la cota superior se puede definir.

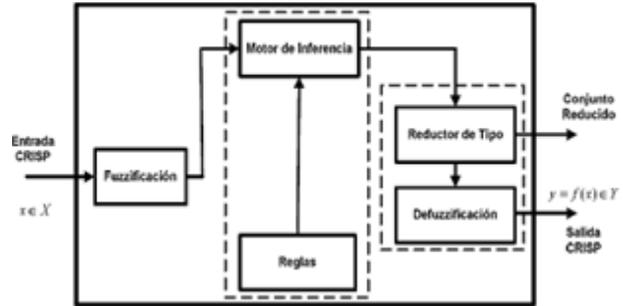
$$C_l(\tilde{A}) \approx \frac{(\sum_{i=1}^L A_i \overline{\mu_{\tilde{A}}}(x_i) + \sum_{i=L+1}^N A_i \underline{\mu_{\tilde{A}}}(x_i))}{(\sum_{i=1}^L \overline{\mu_{\tilde{A}}}(x_i) + \sum_{i=L+1}^N \underline{\mu_{\tilde{A}}}(x_i))} \quad (7)$$

$$C_u(\tilde{A}) \approx \frac{(\sum_{i=1}^U A_i \underline{\mu_{\tilde{A}}}(x_i) + \sum_{i=U+1}^N A_i \overline{\mu_{\tilde{A}}}(x_i))}{(\sum_{i=1}^U \underline{\mu_{\tilde{A}}}(x_i) + \sum_{i=U+1}^N \overline{\mu_{\tilde{A}}}(x_i))} \quad (8)$$

### C) Inferencia difusa tipo-2

Para el análisis de la inferencia difusa tipo-2, con una entrada de conjuntos crisp<sup>5</sup>, se toma como base el esquema general del sistema difuso tipo-2 en base a lo expuesto por [5], donde se puede apreciar cuatro etapas claramente definidas, estas son: la Fuzzificación, el razonamiento difuso donde se encuentra el motor de inferencia que actuará en base a las reglas de inferencia establecida, el reductor de tipo y el Defuzzificador.

**Figura 2: Representación de un sistema difuso tipo-2**



Fuente: Maldonado Robles [5]

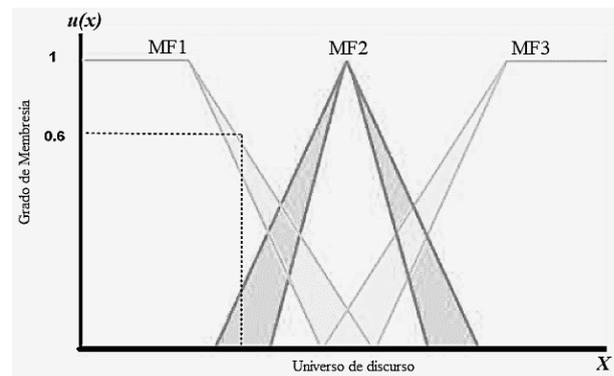
#### i) La Fuzzificación en T2FS

La etapa de fuzzificación, mapea un valor dentro el conjunto difuso, tomando en cuenta que:

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots \times X_n \equiv X \quad (9)$$

Para un conjunto difuso  $\tilde{A}$  tipo-2 en  $X$ , entonces  $\tilde{A}_x$  es un conjunto difuso tipo-2 singleton expresado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A}_x} &= 1 / 1 \text{ para } x = x' \\ \mu_{\tilde{A}_x} &= 0 / 1 \text{ para } x \neq x' \end{aligned}$$



Fuente: Elaboración propia

5. Conjunto crisp = Conjuntos clásicos de la lógica formal, que solo permite dos opciones: de pertenencia o no pertenencia.

### ii) El motor de inferencia y las reglas de inferencia

Estas dos etapas, funcionan de la misma manera que los sistemas difusos tipo-1, con la excepción clara que las premisas del antecedente como del consecuente son representadas por conjuntos difusos tipo-2. Este proceso combina las reglas de inferencia para mapear la entrada de los conjuntos difusos tipo-2 hacia la salida [5], de forma que las reglas de inferencia se pueden expresar de la siguiente forma:

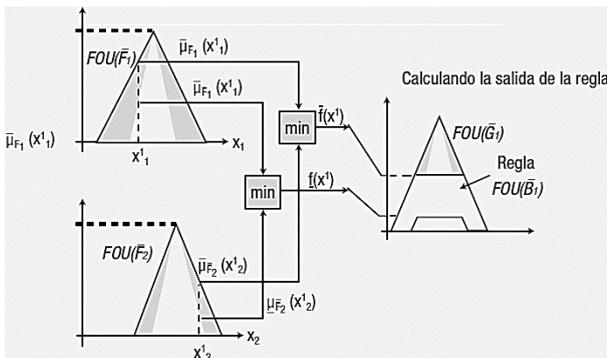
$$R_l^i = IF x_1 \in \tilde{A}_1^l AND x_2 \in \tilde{A}_2^l AND \dots AND x_n \in \tilde{A}_n^l THEN y \in \tilde{B}^l \quad (10)$$

Donde:

$R_l^i$  = Relación difusa tipo-2, el subíndice  $l$  hace referencia a la  $l$ -ésima regla difusa.

De manera gráfica, el cálculo para IT2FS, se expresa de acuerdo a la investigación realizada por [6] en donde se puede apreciar de manera clara el proceso de la inferencia para sistemas difusos tipo-2.

**Figura 4: Inferencia para IT2FS**



Fuente: Diaz & Caicedo [6]

### iii) Reductor de tipo

Como su nombre lo indica, esta etapa realiza una reducción del conjunto difuso tipo-2 en otro

conjunto difuso tipo-1 de intervalo, dentro del rango de la cota superior  $C_u$  y la cota inferior  $C_l$  de los centroides, con el objetivo de encontrar un valor representativo de salida.

En la práctica los valores de los centroides referidos a las cotas superior e inferior se calculan aproximadamente mediante las ecuaciones 7 y 8, para obtener valores representativos de estas cotas, se tiene la necesidad de recurrir a un método iterativo de reducción “Reductor de tipo”, para estimar estos valores.

El *Method Karnik-Mendel (KM)*, es el primer método desarrollado para el reductor de tipo, según lo expuesto por [6] para obtener los valores más representativos de las cotas superior e inferior de un conjunto difuso tipo-2, se parte de:

$$[y_l^i, y_u^i] \text{ donde } i = (1, 2, \dots, M) \quad (11)$$

El cálculo del intervalo de disparo “punto donde cambia de estado” de cada regla.

$$[f^l, \bar{f}^l] \text{ donde } l = 1, 2, \dots, M \quad (12)$$

Para el cálculo:

$$Y_{COS}(x) = [y_l(x), y_u(x)] \quad (13)$$

La solución para la minimización:

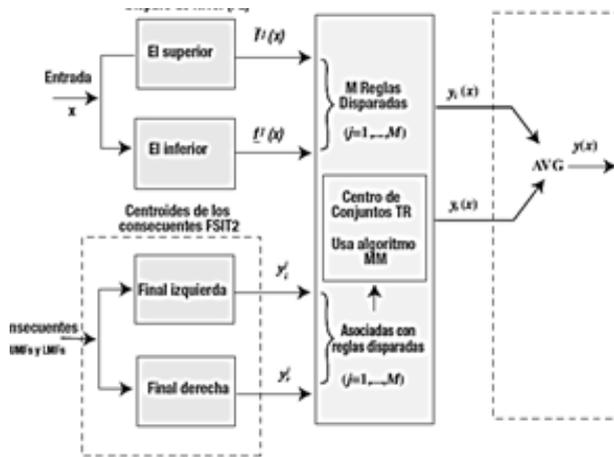
$$y_l(x) = \min_{\forall f^l \in [f^l, \bar{f}^l]} \left[ \frac{\sum_{i=1}^M \mu_i^l(x)}{\sum_{i=1}^M f^l} \right] \quad (14)$$

La solución para la maximización:

$$y_u(x) = \max_{\forall \bar{f}^l \in [f^l, \bar{f}^l]} \left[ \frac{\sum_{i=1}^M \mu_i^l(x)}{\sum_{i=1}^M \bar{f}^l} \right] \quad (15)$$

El método de Karnik y Mendel se representa en la figura 5 donde se puede apreciar la entrada de información del conjunto difuso, el proceso de obtención de los valores de las cotas inferior y superior y la obtención del valor de salida.

**Figura 5: Representación gráfica del método de Karnik – Mendel (KM)**



Fuente: Diaz & Caicedo [6]

**iv) Defuzzificador tipo-2**

Después de la reducción de un conjunto difuso tipo-2 a un conjunto difuso tipo-1, sigue la defuzzificación para obtener un valor representativo en la salida, este valor se lo obtiene aplicando el reductor de tipo de centro de conjuntos “COS”.

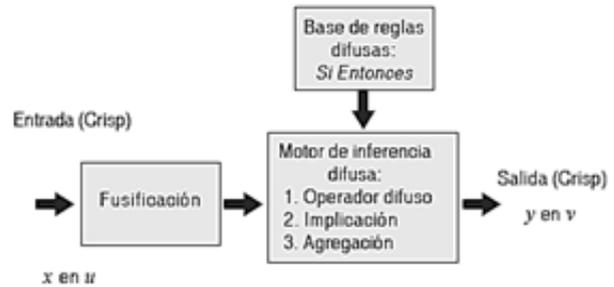
La defuzzificación es un promedio entra las cotas superior e inferior y el reductor de centro de conjuntos COS devolverá un intervalo  $[y_l, y_u]$

$$y(x) = \frac{y_l + y_u}{2} \quad (16)$$

**D) Método de inferencia Takagi-Sugeno-Kang TSK**

El método de inferencia TSK propuesto por Takagi, Sugeno en 1985 y Sugeno, Kant en 1985, conocido generalmente como *método de Sugeno*, el cual es una alternativa de solución de sistemas difusos cuando el método de Mamdani no pueda entregar respuestas satisfactorias. Este método TSK hace énfasis en la forma de calcular la salida, al no trabajar con un conjunto difuso sino con una *función lineal* [7].

**Figura 6: Método de inferencia de Sugeno-TSK**



Fuente: Espitia & Soriano [8]

Para este método TSK, el antecedente viene representado por un conjunto difuso al igual que el método de Mamdani, al aplicar el operador IF se obtiene un grado de pertenencia para cada una de las reglas difusas. El cálculo del consecuente mediante el operador THEN de las reglas se obtiene el respectivo valor de salida mediante la combinación lineal de las entradas.

Sea los conjuntos difusos:  $\mu_A, \mu_B$  además  $x \in \mu_A$ ,  $y \in \mu_B$  la función lineal  $\mathcal{F}(x,y)$  y el tipo de implicación SI – ENTONCES, se puede definir la siguiente la siguiente relación:

$$\text{If } x \in \mu_A \text{ AND } y \in \mu_B \text{ Then } z = \mathcal{F}(x,y) \quad (17)$$

En el caso especial cuando  $\mathcal{F}(x,y)$  es un polinomio de orden cero, se puede identificar como un caso del método de Mamdani, donde el consecuente de cada regla viene dado por una función singleton.

**E) La estabilidad de Lyapunov**

Existen varias formas para el análisis de estabilidad de sistemas continuos e invariantes en el tiempo, una forma práctica analizando el comportamiento del sistema se lo puede obtener a través de la teoría de estabilidad de Lyapunov, la cual brinda una forma genérica para el análisis de la estabilidad de forma indirecta [9].

El análisis de estabilidad de Lyapunov de un sistema dinámico, toma en cuenta que toda

función real lleva un concepto de energía [10] y al seleccionar una función a la cual se la denomina como función candidata, este estudia su evolución en el tiempo. Si la función es acotada o decreciente a lo largo de su trayectoria, entonces el sistema tiene la propiedad de ser estable, a esta función analizada se la denomina función de Lyapunov FL.

Una función candidata a FL, debe satisfacer las siguientes propiedades:

- $V(X)$  es continua en el tiempo y su derivada también es continua
- $V(0) = 0$
- $V(X) > 0; \forall x \neq 0$
- $\frac{dV(X)}{dt} = \left[ \frac{\partial V(X)}{\partial x} \right]^T \frac{dx}{dt} < 0; \forall x \neq 0$

Donde:

$X$  = representa una matriz ( $m \times m$ )

### 3. desarrollo del controlador T2FC

#### A) Antecedentes

En principio para el desarrollo del controlador difuso tipo-2 T2FC, se debe tomar en cuenta la doble normalización de la ganancia y tiempo de los procesos de primer orden con tiempo muerto First Order Plus Dead Time, *FOPDT* permite el análisis sistemático de la respuesta dinámica de los sistemas controlados [11], tomando en cuenta la ecuación diferencial 2.18, se ajustará a los términos adecuados de representación de sistemas de primer orden. Según Cooper [12]:

$$\tau_p = R_l * C \quad (18)$$

$$K_p = R_l \quad (19)$$

$$\theta_p = t_m \quad (20)$$

$$u(t) = Q(t) \quad (21)$$

$$y(t) = h \quad (22)$$

En base a la ecuación diferencial generalizada de FOPDT:

$$\tau_p * \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K_p * u(t - \theta_p) \quad (23)$$

Donde:

$\tau_p$  = Constante de tiempo del sistema

$K_p$  = Ganancia estática del sistema

$\theta_p$  = Tiempo e retardo de acción del sistema

$u(t)$  = Señal de control

$y(t)$  = Señal de medida de la variable de proceso

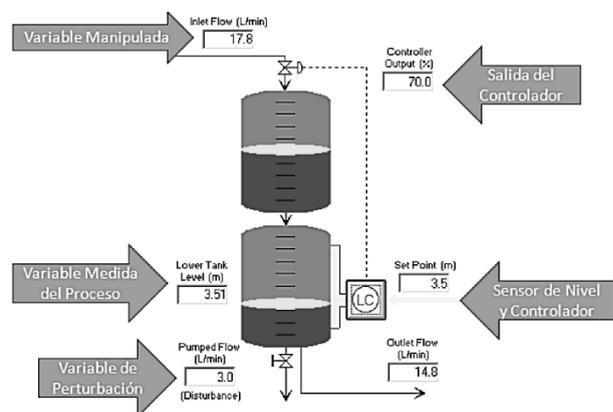
Aplicando la transformada de LaPlace a la ecuación diferencial 23, se tendrá:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_p * e^{-\theta_p * s}}{\tau_p * s + 1} \quad (24)$$

Para el análisis dinámico del proceso de llenado de los tanques de agua, en base a la maqueta virtual ofrecida por Control Station v3.7®, se tomarán en cuenta las características más importantes que nos permitirán obtener los datos de las variables involucradas dentro el proceso y de esta manera determinar la ecuación característica que modela a la planta.

La maqueta virtual consta de cinco partes importantes, las cuales son: la variable manipulada, la salida del controlador, la variable medida del proceso "set point", el sensor de nivel y la variable de perturbación, como se puede observar en la figura 7.

Figura 7: Partes importantes del sistema



Fuente: Según lo establecido por [13]

Para el modelado matemático del sistema de llenado de tanques de agua conectados, se debe tomar en cuenta algunas condiciones iniciales, las cuales permitan identificar su comportamiento dinámico en base a condiciones establecidas de funcionamiento normal, para su posterior generalización y comprobación de acuerdo a casos de estudio. Se tomará las siguientes condiciones iniciales:

- a) Las propiedades del fluido son constantes no cambian durante el proceso
- b) Dentro el tanque no habrá ningún tipo de reacción química

### ***B. Propuesta de desarrollo***

De acuerdo a la metodología de Buchanan [14] para la construcción de un sistema experto, esta debe dividirse en cinco fases analizadas en el marco teórico, los cuales serán la base para el diseño del controlador difuso tipo-2.

#### ***i) Identificación de datos normalizados***

Los datos base del sistema de tanques de agua, se encuentran definidos de la siguiente manera:

- $q_i(t)$  [lt/min] = Caudal de líquido de entrada hacia el tanque.
- $q_o(t)$  [lt/min] = Caudal de líquido de salida del tanque.

- $q_d(t)$  [lt/min] = Caudal de líquido de la perturbación de entrada hacia el tanque.
- $h(t)$  [m] = Altura del nivel de líquido del tanque.
- $\Delta h(t)$  [m] = Desviación de la altura del nivel de líquido del tanque.
- Porcentaje [%] = Porcentaje de llenado tanque alimentador

#### ***ii) Conceptualización variables in-out***

Las variables del sistema realimentado propuesto, identificadas para el desarrollo del controlador difuso tipo-2, basados en la identificación del funcionamiento del controlador que brinda el experto y en las cuales se puede definir el universo de discurso, son:

##### *Las variables de entrada*

- ***error***, el error, producido entre la diferencia del valor del set-point
- ***derror***, la variación de cambio instantáneo del error

##### *La variable de salida*

- ***Nivel***, El nivel final que alcanza el tanque principal de agua

**Tabla 1: Definición del universo de discurso de las variables de entrada y salida del controlador T2FC**

Variable	Etiqueta	Tipo	Universo de discurso	Unidades	Nº de FM
Set-point	Nivel deseado	Entrada	1 a 8	[m]	-
Señal de error	error	Entrada	-9 a 9	[m]	6
Señal del cambio instantáneo del error	derror	Entrada	-1 a 1	-	6
Variable de control	Nivel	Salida	-9 a 9	[m]	5

**Fuente:** Elaboración propia

iii) **Formalización:** *Estrategia de* dentro de su universo de discurso, representadas en la tabla 2.  
**Fuzzificación**

Para la variable de entrada del error, se definen seis variables lingüísticas del tipo triangular distribuidas

**Tabla 2: Definición en términos lingüísticos del conjunto difuso tipo-2 del error**

Denominación	Identificación	Detalle
errorNU	Error negativo superior	Es cuando la salida del error está muy por encima del valor de referencia.
errorNL	Error negativo inferior	
errorZU	Error cero superior	Es cuando la salida del error es igual al valor de referencia.
errorZL	Error cero inferior	
errorPU	Error positivo superior	Es cuando la salida del error está muy por debajo del valor de referencia.
errorPL	Error positivo inferior	

**Fuente:** Elaboración propia

Para la variable de entrada de la señal de cambio del error o derivada del error se definen seis variables lingüísticas del tipo triangular distribuidas dentro de su universo de discurso, representadas en la tabla 3.

**Tabla 3: Definición en términos lingüísticos del conjunto difuso tipo-2 de la derivada del error**

Denominación	Identificación	Detalle
derrorNU	Derivada del Error negativo superior	Es cuando la salida tiene una pendiente positiva.
derrorNL	Derivada del Error negativo inferior	
derrorZU	Derivada del Error cero superior	Es cuando la salida permanece constante.
derrorZL	Derivada del Error cero inferior	
derrorPU	Derivada del Error positivo superior	Es cuando la salida tiene una pendiente negativa.
derrorPL	Derivada del Error positivo inferior	

**Fuente:** Elaboración propia

Para la variable de salida o variable de control, se definen cinco variables lingüísticas distribuidas dentro de su universo de discurso, representadas en la tabla 4.

**Tabla 4: Definición en términos lingüísticos del conjunto difuso tipo-2 de la variable de control**

Denominación	Identificación	Detalle
NivelNB	Nivel negativa grande	Es cuando se necesita bajar de manera inmediata el nivel del tanque de agua principal.
NivelNM	Nivel negativa medio	Es cuando se necesita bajar de manera rápida el nivel del tanque de agua principal.
NivelZ	Nivel cero	Es cuando la salida permanece constante.
NivelPM	Nivel positiva medio	Es cuando se necesita subir de manera rápida el nivel del tanque de agua principal.
NivelPG	Nivel positiva grande	Es cuando se necesita subir de manera inmediata el nivel del tanque de agua principal.

Fuente: Elaboración propia

Las reglas difusas son la forma de como un controlador difuso tipo-2 puede almacenar el conocimiento lingüístico, con esos datos se puede establecer una matriz con las combinaciones posibles que pueden presentarse en el proceso de control.

Para el diseño de este controlador difuso tipo-2, se establecen 9 reglas difusas distribuidas en base a la tabla 5, utilizando el tipo de implicación general de Sugeno en base a la ecuación 17.

**Tabla 5: Conjunto de reglas difusas para el controlador tipo-2 con implicación general de Sugeno**

REGLAS DIFUSAS
1. If (error is N) and (derror is N) then (Nivel is PB)
2. If (error is N) and (derror is Z) then (Nivel is PM)
3. If (error is N) and (derror is P) then (Nivel is Z)
4. If (error is z) and (derror is N) then (Nivel is PM)
5. If (error is z) and (derror is Z) then (Nivel is Z)
6. If (error is z) and (derror is P) then (Nivel is NM)
7. If (error is P) and (derror is N) then (Nivel is Z)
8. If (error is P) and (derror is Z) then (Nivel is NM)
9. If (error is P) and (derror is P) then (Nivel is NB)

Fuente: Elaboración propia

Con los valores obtenidos se procede a calcular el centroide de todas las funciones de pertenencia incrustadas en FOU utilizando las ecuaciones 7 y 8 para la cota inferior y superior respectivamente.

#### *iv) Formalización: Etapa Defuzzificación*

Para el diseño del controlador difuso tipo-2, se utilizó como reductor de tipo el método de Karnik-Mendel, por ser el más simple y brinda

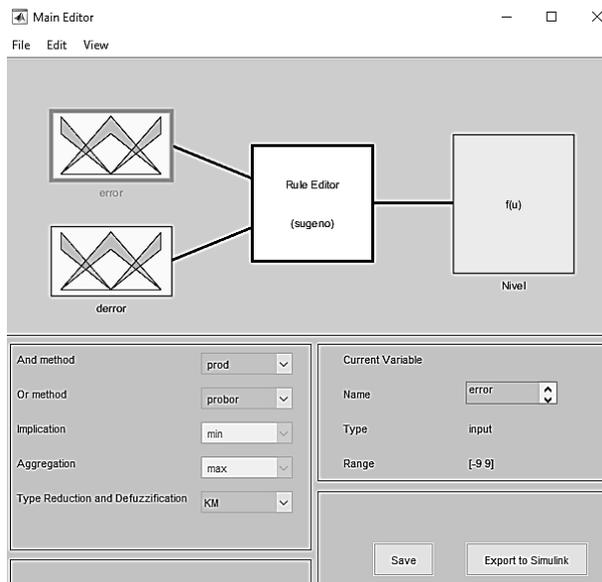
una buena respuesta en la salida al aplicar el centro de conjuntos “COS”.

Se utiliza *funciones triangulares* por su sencillez y ser más adecuadas para la respuesta del controlador difuso tipo-2. La generación de las superficie del polígono en la etapa de defuzzificación, se obtienen por las operaciones de *minimización y maximización* de las cotas inferiores y superiores y generar en base a las reglas de inferencia y la FOU el valor de salida más representativo del controlador difuso.

### v) *Formalización: Etapa Defuzzificación*

Para la representación en diagrama de bloques del diseño del controlador difuso tipo-2 dentro el sistema de control, se utilizará el software de ingeniería y modelaje matemático MatLab 2015b y su aplicación Simulink, también es necesario contar con la librería Fuzzy Logic Type2 instalada, la cual no viene por defecto, pero se puede solicitar a la página web oficial de MatLab, mediante el nombre de *Interval Type-2 Fuzzy Logic System Toolbox*.

**Figura 8: Representación de las variables del T2FC dentro de Fuzzy Logic System Toolbox**



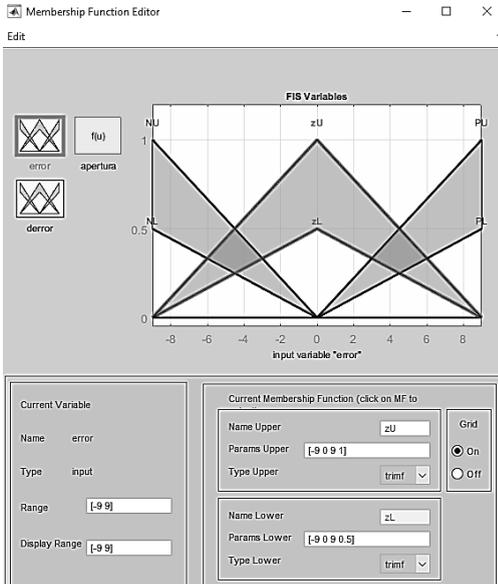
**Fuente:** Elaboración propia

En base al diseño del controlador difuso tipo-2, en la figura 8, se presentan las dos entradas referidas al error y la derivada del error, la salida que representa al nivel final del tanque de agua principal, el motor de inferencia utilizando el método de Sugeno, donde se encuentran las reglas difusas y el reductor de tipo utilizado para la defuzzificación por el método de Karnik-Mendel “KM”.

Las funciones de membresía que generan la FOU se representan dentro el sistema de inferencia difusa FIS<sup>6</sup>, referidas a la variable de entrada asignada a el error, se representan en la figura 9 mostrando el universo de discurso y las funciones de pertenencia superiores e inferiores.

6. FIS = Fuzzy Inference System

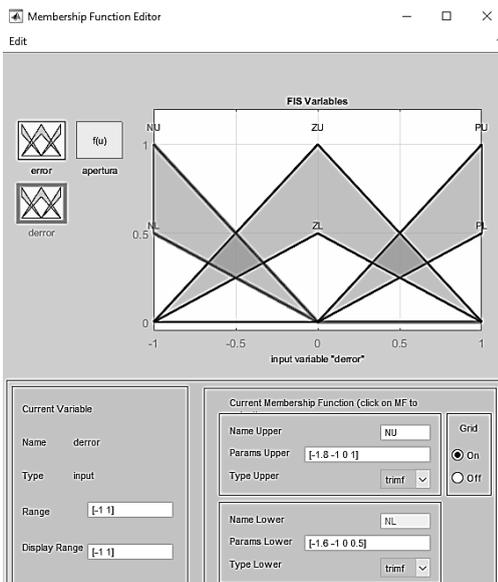
**Figura 9: Funciones de membresía de la variable de entrada del error del T2FC**



Fuente: Elaboración propia

Para la variable de entrada asignada a la derivada del error, se representan en la figura 10 mostrando el universo de discurso y las funciones de pertenencia superiores e inferiores.

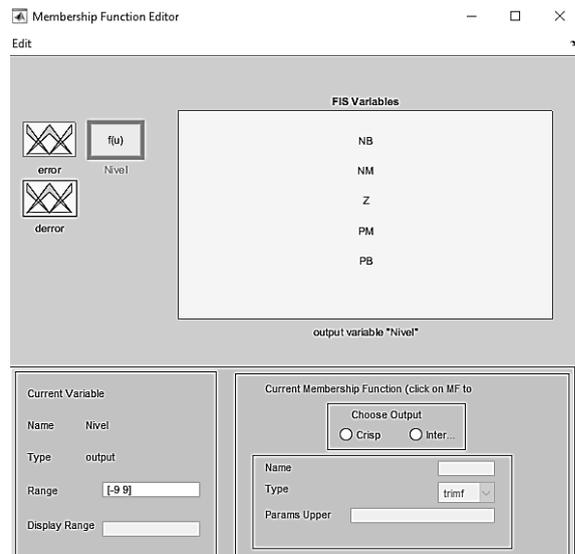
**Figura 10: Funciones de membresía de la variable de entrada de la derivada del error del T2FC**



Fuente: Elaboración propia

Las funciones de membresía que generan la FOU se representan dentro el sistema de inferencia difusa FIS, referidas a la variable de salida asignada a la variable de control, se representan en la figura 11.

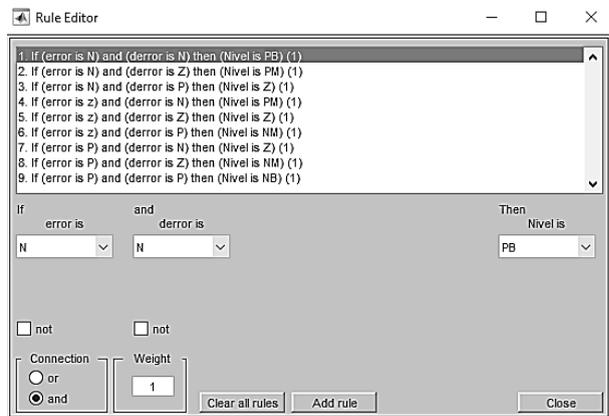
**Figura 11: Funciones de membresía de la variable de salida de la variable de control del T2FC**



Fuente: Elaboración propia

En el Rule Editor de Type-2 Fuzzy Logic System Toolbox, se pueden introducir las reglas difusas de funcionamiento del T2FC, las cuales se identificaron en la tabla 5.

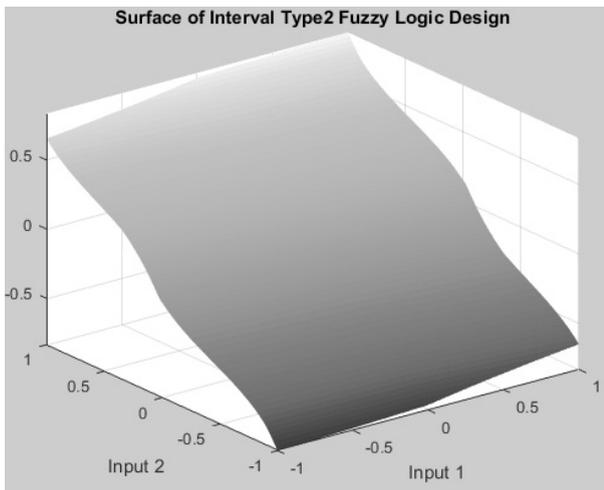
**Figura 12: Reglas difusas para el T2FC**



Fuente: Elaboración propia

El análisis de la superficie obtenida de las funciones de membresía y la defuzzificación se presentan en la figura 13.

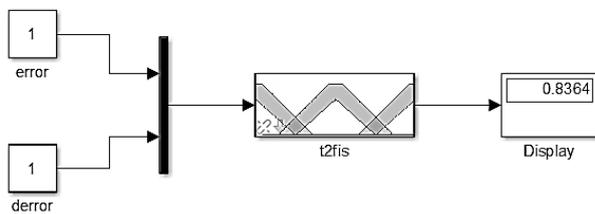
**Figura 13 Vista diagonal izquierda de la superficie de las funciones de membresía**



Fuente: Elaboración propia

El diagrama en bloques solamente del controlador difuso tipo-2 T2FC, se lo representa en la figura 14.

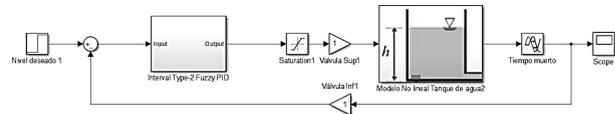
**Figura 14: Representación en diagrama de bloques del T2FC**



Fuente: Elaboración propia

La representación del sistema de control completo incluido el controlador difuso tipo-2, se puede observar en la figura 15, según el diseño preliminar y la planta a controlar, para realizar el análisis teórico de la respuesta a la función escalón.

**Figura 15: Diagrama en bloques del sistema de control y el controlador difuso T2FC**

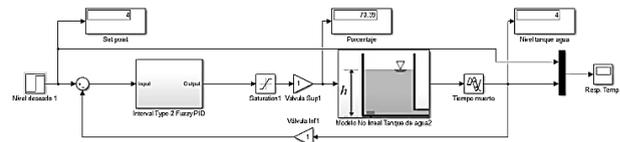


Fuente: Elaboración propia

### vi) Prueba o Testeo – Diagramas en bloques

En base al diseño realizado para el controlador difuso tipo-2 T2FC, se realiza la prueba de funcionamiento del controlador dentro de todo el sistema de control y la asignación de un set point deseado, mostrando un adecuado funcionamiento del controlador difuso tipo-2, en base a la determinación de las funciones de membresía la inferencia realizada por el método de Sugeno.

**Figura 16: Prueba de funcionamiento del diagrama en bloques del sistema de control**



Fuente: Elaboración propia

### Aplicando la estabilidad de Lyapunov

En base al análisis de comportamiento del sistema, para el análisis de la estabilidad es necesario determinar la función candidata, la cual cumpla con las propiedades establecidas por Lyapunov.

En los sistemas realimentados de lazo cerrado, es necesario analizar la diferencia que se produce entre el set-point y la variable de control, a la cual se la denomina como “error”, por lo tanto el valor de la variable de control se utilizará para acortar el error.

$$\dot{e}(t) = -\dot{x}(t) \quad (25)$$

Resolviendo la ecuación diferencial se tiene:

$$e(t) = e(0) * e^{-k*t} \quad (26)$$

Si  $t \rightarrow \infty$  el error tiende a ser cero.

Por lo tanto se analizará la función de la variable de control para analizar la estabilidad asintótica del sistema, seleccionando en primera instancia la función candidata FL, la cual debe ser definida de forma positiva.

$$V = \frac{1}{2} [e^2 + \dot{e}^2] \quad (27)$$

Al considerar una función cuadrática, está siempre será positiva, cumpliendo el primer criterio de estabilidad.

Derivando la ecuación 27 se tiene:

$$\dot{V} = e * \dot{e} + \dot{e} * \ddot{e} \quad (28)$$

El segundo criterio de estabilidad asintótica de Lyapunov indica que la derivada de la función candidata tiene que ser definida negativa para garantizar que la función tiende a cero.

$$\text{Si } w = \ddot{e} \quad \dot{V} < 0; \forall x \neq 0$$

Realizando un cambio de variable y factorizando se tendrá:

$$\dot{V} = \dot{e}(e + w) \quad (29)$$

Analizando  $w$  está afectada por la variable de control, que en nuestro caso es el nivel, tomando en cuenta la ecuación 23 definido para el modelo del tanque de agua se tendrá:

$$w = \ddot{e} = \dot{y}(t), u(t) \quad (30)$$

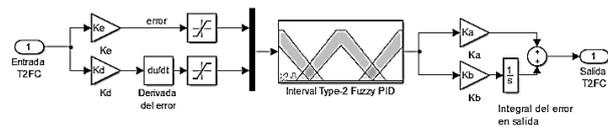
Integrando:

$$\dot{e} = y(t) + \int u(t)dt \quad (31)$$

Donde: representa a la altura final del tanque de agua y la variable del error que se debe considerar en el diseño del controlador difuso tipo-2 T2FC, para el análisis de estabilidad de Lyapunov.

El diseño del controlador difuso tipo-2 T2FC considerando la estabilidad de Lyapunov, se lo encuentra en la figura 17, donde se puede apreciar la implementación del criterio de estabilidad asintótica de Lyapunov.

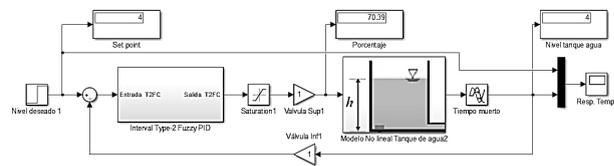
**Figura 17: Respuesta temporal del sistema de control y el T2FC**



Fuente: Elaboración propia

El diagrama en bloques completo del sistema de control, más la implementación del criterio de estabilidad de Lyapunov se lo puede apreciar en la figura 18.

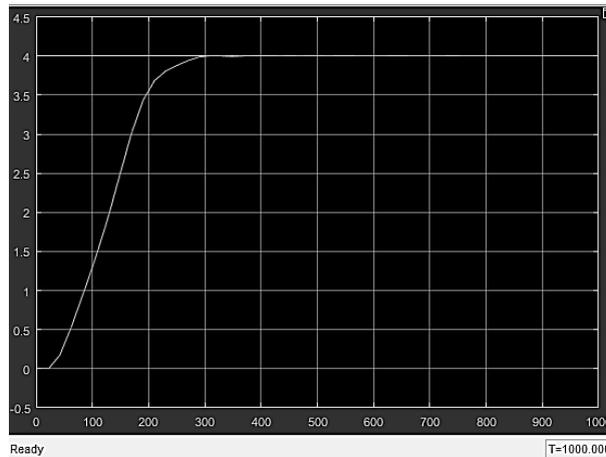
**Figura 18: Diagrama en bloques del sistema de control y el T2FC**



Fuente: Elaboración propia

La respuesta temporal de todo el sistema de control diseñado, para un set point de 4[m] con los que se hizo la prueba todos los controladores, se puede apreciar en la figura 19, demostrando su correcto funcionamiento de acuerdo al diseño y el análisis de estabilidad de Lyapunov.

**Figura 19: Respuesta temporal del sistema de control y el criterio de estabilidad del T2FC**



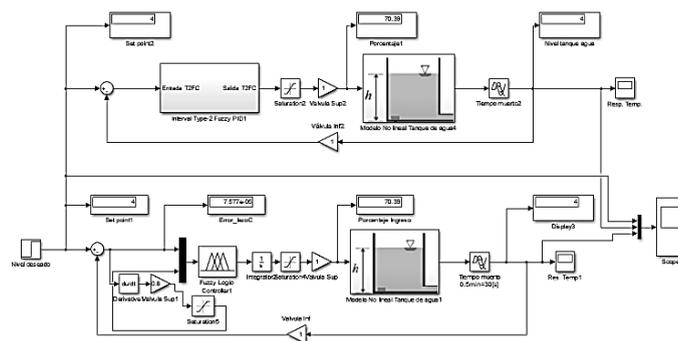
Fuente: Elaboración propia

#### 4. validación de resultados

Para el análisis de comportamiento, se tomarán en cuenta los distintos niveles a los cuales se quiere acceder mediante la variación del set-point en el nivel del tanque de agua y se mostrarán los valores obtenidos de su respuesta

temporal de manera colectiva, tanto del controlador difuso tipo-2 T2FC comparando con un controlador difuso tipo-1 T1FC, dentro del régimen transitorio cuando la señal de entrada es una función escalón. El diagrama de bloques completo se muestra en la figura 20.

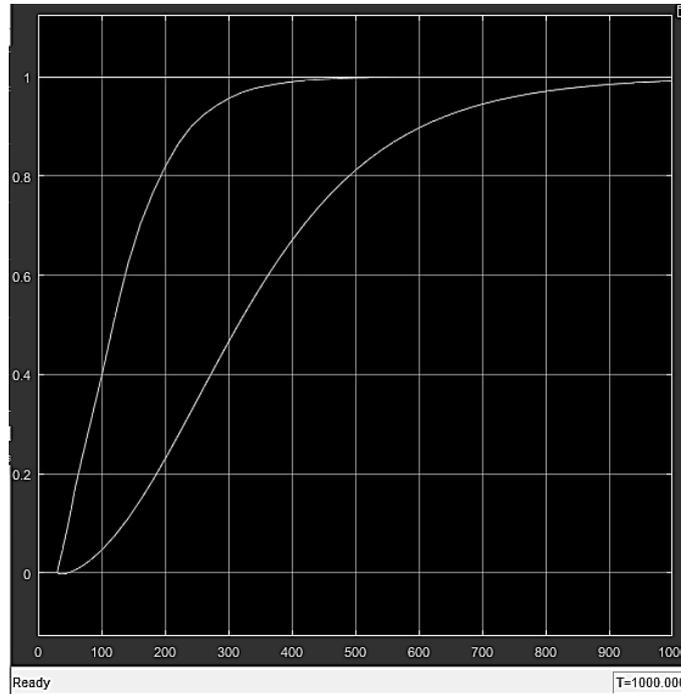
**Figura 20: Diagrama en Bloques de los controladores difuso tipo-1 T1FC y tipo-2 T2FC**



Fuente: Elaboración propia

**La respuesta a 1[m]:**

**Figura 21: Respuesta del sistema de control - modelo llenado de tanques de agua con T1FC y T2FC a 1[m]**



Fuente: Elaboración propia

Los resultados de la respuesta al escalón de 1[m] de los dos controladores T1FC y T2FC, analizando el régimen transitorio, se presenta en la tabla 6.

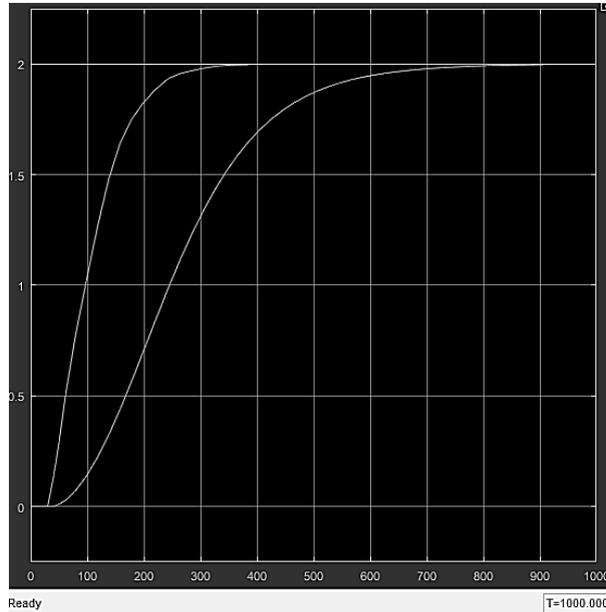
**Tabla 6: Sistema de control de nivel de tanques de agua a 1[m]**

Controlador	Tiempo de retardo – $t_d$ [s]	tiempo de subida – $t_r$ [s]	Sobreelongación - $M_p$ [m]	Tiempo de asentamiento – $t_s$ [s]
T1FC	315.616	1000	0	1000
T2FC	119.003	498.119	0	500

Fuente: Elaboración propia

La respuesta a 2[m]:

**Figura 22: Respuesta del sistema de control - modelo llenado de tanques de agua con T1FC y T2FC a 2[m]**



Fuente: Elaboración propia

Los resultados de la respuesta al escalón de 2[m] de los dos controladores T1FC y T2FC, analizando el régimen transitorio, se presenta en la tabla 7.

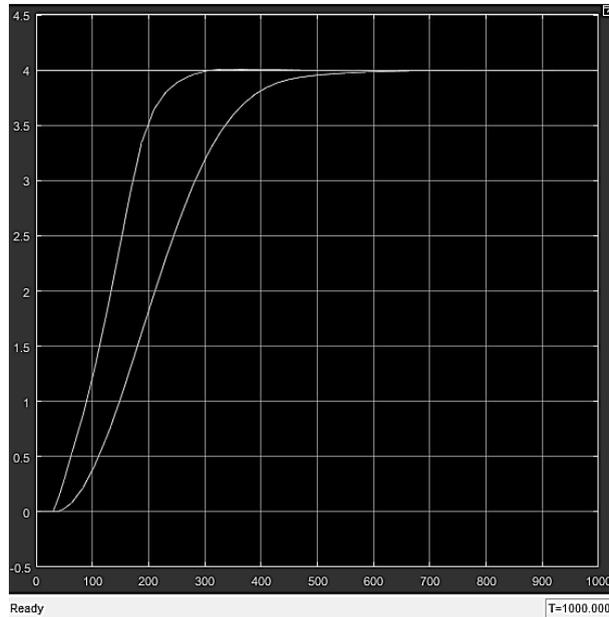
**Tabla 7: Sistema de control de nivel de tanques de agua a 2[m]**

Controlador	Tiempo de retardo – td [s]	tiempo de subida – tr [s]	Sobreelongación - Mp [m]	Tiempo de asentamiento – ts [s]
T1FC	246.002	825.494	0	924.271
T2FC	97.366	346.660	0	373.942

Fuente: Elaboración propia

La respuesta a 4[m]:

**Figura 23: Respuesta del sistema de control - modelo llenado de tanques de agua con T1FC y T2FC a 4[m]**



Fuente: Elaboración propia

Los resultados de la respuesta al escalón de 4[m] de los dos controladores T1FC y T2FC, analizando el régimen transitorio, se presenta en la tabla 8.

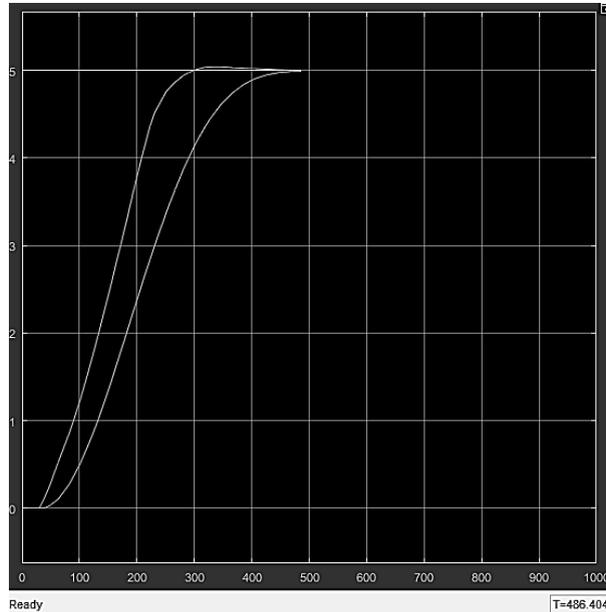
**Tabla 8: Sistema de control de nivel de tanques de agua a 4[m]**

Controlador	Tiempo de retardo – $t_d$ [s]	tiempo de subida – $t_r$ [s]	Sobreelongación - $M_p$ [m]	Tiempo de asentamiento – $t_s$ [s]
T1FC	211.792	634.434	0	700.472
T2FC	133.491	307.075	0	433.491

Fuente: Elaboración propia

La respuesta a 5[m]:

**Figura 24: Respuesta del sistema de control - modelo llenado de tanques de agua con T1FC y T2FC a 5[m]**



Fuente: Elaboración propia

Los resultados de la respuesta al escalón de 5[m] de los dos controladores T1FC y T2FC, analizando el régimen transitorio, se presenta en la tabla 9.

**Tabla 9: Sistema de control de nivel de tanques de agua a 5[m]**

Controlador	Tiempo de retardo – $t_d$ [s]	tiempo de subida – $t_r$ [s]	tiempo de pico – $t_p$ [s]	Sobreelongación – $M_p$ [m]	Tiempo de asentamiento – $t_s$ [s]
T1FC	206.623	470.616	498.601	0	500
T2FC	152.519	298.974	339.086	0.44	433.302

Fuente: Elaboración propia

## 5. Conclusiones

Las conclusiones a las cuales se pudo llegar al término de la presente investigación son:

- Sepudopresentar los principales conceptos de manera resumida relacionados con el diseño de controladores difusos tipo-2 T2FC, utilizando el software de modelado matemático MatLab v15b con la librería Fuzzy Logic Type2 (Interval Type-2 Fuzzy Logic System Toolbox).
- Con las bases teóricas, se logró diseñar y validar el funcionamiento del controlador difuso tipo-2 T2FC dentro de una maqueta virtual proporcionada por el software Control Station V3.7® mediante

el análisis de su respuesta transitoria de los controladores T1FC y T2FC.

- Se pudo realizar una evaluación comparativa entre controladores difusos T1FC Y T2FC, para el control de nivel de tanques de agua con tiempo muerto para mejorar el P.E.A. al momento del desarrollo de este tipo de controladores.
- Se pudo demostrar que la respuesta del controlador difuso T2FC, presenta una respuesta más rápida y no ofrece sobreelongsiones que pueden dañar a los equipos conectados.
- Dentro el análisis de estabilidad se pudo demostrar que el controlador difuso T2FC es más estable en comparación al T1FC, porque no se advierte cambios significativos al momento de variar el set-point.

## Bibliografía

- Salazar de León, J. *“Control Difuso Tipo-2 aplicado a Sistemas Mecatrónicos”*. Torreón, Coahuila - México: Tecnológico Nacional de México, división de estudios de posgrado e investigación, 2021.
- Rodriguez, M., & Huertas, Y. “Methodology for Designing Type-2 Fuzzy sets from Experts Opinions”. *Revista de Ingeniería*, 1-17, 2015.
- Duran, L., & Melgarejo, D. “Implementación Hardware del algoritmo de Karnic-Mendel mejorado basada en operadores CORDIC”. *Ingeniería y Competitividad*, 21-39, 2009.
- Jerry M. Mendel. “Type 2 Fuzzy set and systems: An Overview”. *IEEE Computational Intelligence Magazine*- February 2007.
- Maldonado Robles, Y. “Diseño, implementación y prueba de la etapa de fuzzificación para sistemas difusos tipo-1 y tipo-2” Tijuana, México: Instituto Politécnico Nacional, centro de investigación y desarrollo de tecnología digital, 2008.
- Diaz, G. A., López Sotelo, J. A., & Caicedo Bravo, E. “Aplicación de la lógica difusa tipo dos en una planta didáctica en control de procesos industriales respecto de las variables nivel y flujo” *sistemas y telemática*, 1-21, 2009.
- Maguiña Pérez, R. A. “Sistemas de inferencia basados en Lógica Borrosa: Fundamentos y caso de estudio” *Revista de Investigación de Sistemas e Informática - Universidad Nacional Mayor de San Marcos*, 91-104, 2010.
- Espitia Cuchango, H. E., & Soriano Mendez, J. J. “Sistema de inferencia difusa basado en relaciones Booleanas” *Universidad distrital Francisco José de Caldas*, 52-67, 2010.
- Castaño Giraldo, S. A. “Control Automático y Educación - Estabilidad por Lyapunov” obtenido de: <https://controlautomaticoeducacion.com/sistemas-dinamicos-lineales/lyapunov/>, del 16 de febrero de 2022.
- Cruz Zabala, E. “Funciones de Lyapunov de control para el diseño de controladores discontinuos” México D.F. Universidad Nacional Autónoma de México programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, 2014.
- Eduard, B. “Comparación entre diferentes procedimientos de ajuste de controladores PID. I. Valores máximos de la variable controlada y de la señal reguladora” *QS School of Engineering, Universitat Ramon Llull*, 4, 2013.
- Cooper, D. “Practical Process Control. Connecticut” University of Connecticut, 2004.

Ochoa S. German y Ordoñez Jorge “Elaboracion de un manual para el control de nivel de líquido de un tanque mediante la utilización del software Control Station V3.7® e implementación en una maqueta”, Universidad del Azuay, Facultad de Ciencia y Tecnología, Ecuador, 2009.

Delgado Linda, Cortez Augusto y Ibañez esteban, “Aplicación de la metodología de Buchanan para la construcción de un system expert con redes bayesianas”, Revista de la Facultad de Ingeniería Industrial, ISSN: 1810-9993, Universidad Nacional Mayor de San Marcos-Perú, 2015.

Fecha de recepción: 19 de septiembre  
Fecha de aprobación: 23 de diciembre

